ع

OSMANIA UNIVERSITY

جامعہ عثمانیہ

علم ہندسہ مستوی

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نشان (۲۲۴)

علم ہندسۂ مستوی

Plane Geometry

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم-اے

ریڈر شعبۂ ریاضی جامعۂ عثمانیہ

و

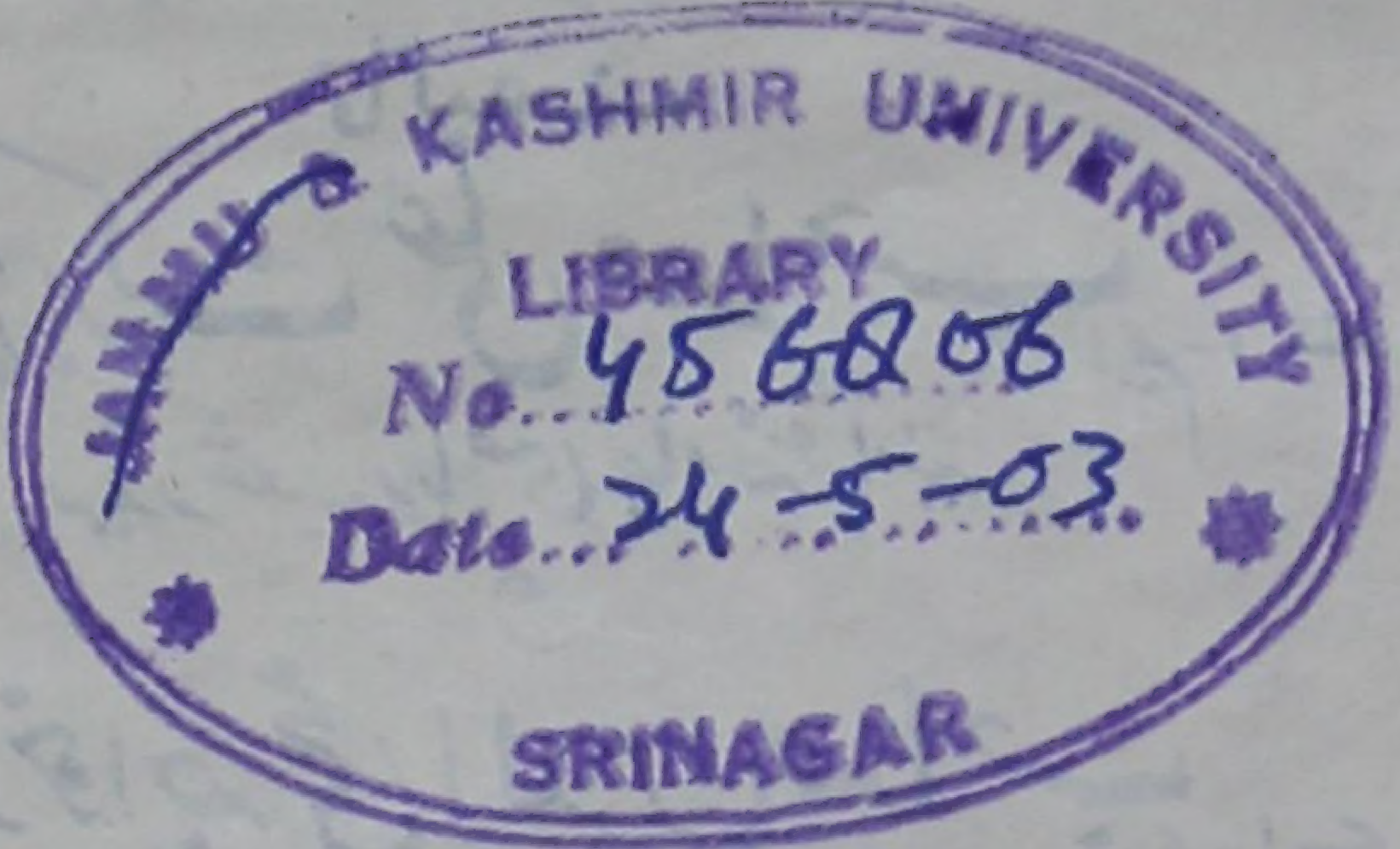
محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم-اے

ریڈر شعبۂ ریاضی جامعۂ عثمانیہ

بار دوم

۱۳۶۵ھ ۱۳۵۵ف ۱۹۴۶ء

مطبوعۂ

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

دیباچہ

علمِ ہندسۂ مستوی

ہندسۂ مستوی کا یہ مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعۂ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لیے تالیف کیا گیا ہے۔ جہاں تک ممکن تھا ہندسۂ مستوی کے نصاب کو ملحوظ رکھتے ہوئے اس رسالہ کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس مقصد کی تکمیل کے لیے چند دفعات جو علامت ✲ سے نشان زد کی گئی ہیں مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کے لیے نصاب سے زائد درج کی گئی ہیں مگر یہ دفعات ایسی ہیں کہ تقریباً جملہ طلباء ان کو آسان اور دلچسپ پائینگے۔

مناسب مشقوں کے انتخاب کی غرض سے متعدد مستند انگریزی کتابوں سے استفادہ کیا گیا ہے۔ مسائل پر مکمل طور پر حاوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ طالب علم حتی الامکان مسائل کے متعلقہ امثلہ میں مشقوں کی کافی تعداد کو حل کرنے کی پوری پوری کوشش کرے۔ طالب علم کی سہولت کے مدِنظر جہاں ضروری تصور کیا گیا مشقوں کے اشارے یا مکمل حل درج کردیے گئے ہیں۔ فقط

المرقوم یکم آبان ۱۳۴۴ف

شیخ برکت علی

محمد خواجہ محی الدین

فہرستِ مضامین

(علم ہندسۂ مستوی)

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

علم ہندسۂ مُستوی

پہلا باب

تمہید

۱۔ اس باب میں بطور تمہید ہم ایسے اہم مسائل درج کرتے ہیں جن سے طالب علم کو اس کتاب کے شروع کرنے سے پہلے واقف ہونا ضروری ہے۔ یہ تمام مسائل ثبوت اور توضیحی مثالوں کے ساتھ بالعموم علم ہندسہ کی اُن تمام درسی کتابوں میں پائے جاتے ہیں جو مدارس فوقانیہ میں استعمال ہوتی ہیں۔

۲۔ خطوطِ مستقیم۔

(۱) اگر ایک خطِ مستقیم ایک اَور خطِ مستقیم سے ملے تو دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کریں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ایک قاطع دو خطوط کو کاٹے اور متبادل زاویے مساوی ہوں تو مؤخر الذکر دو خطوط متوازی ہونگے اور اس کا عکس۔

۳۔ مثلثات اور متوازی الاضلاع۔

(۱) کسی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) دو مثلث ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہوں گے اگر

(ا) ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے جُدا جُدا مساوی ہوں اور ان ضلعوں سے بننے والے زاویے بھی مساوی ہوں۔

(ب) اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے نظیر کے ضلع کے برابر ہو۔

(ج) اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے جُدا جُدا برابر ہوں۔

(۳) اگر ایک مثلث کے دو ضلعے آپس میں مساوی ہوں تو اُن کے مقابل کے زاویے بھی مساوی ہونگے اور اس کا عکس۔

(۴) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں میں ایک کا وتر اور ایک ضلع دوسرے کے وتر اور ایک ضلع کے بالترتیب مساوی ہوں تو مثلث ہر طرح سے مساوی ہونگے۔

(۵) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خطِ مستقیم تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ وہ عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ سے خطِ مذکور تک کھینچا جائے۔

(۶) متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور نیز زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو مساوی حصّوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(۷) اگر تین (یا تین سے زیادہ) متوازی خط ایسے ہوں کہ اُن سے ایک قاطع کے مقطوعے مساوی ہوں تو کسی دوسرے قاطع کے مقطوعے بھی مساوی ہونگے۔

۴۔ رقبے۔

(۱) مساوی قاعدوں اور مساوی ارتفاعوں والے متوازی الاضلاع (یا مثلث) رقبے کے لحاظ سے مساوی ہوتے ہیں۔

(۲) کسی مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

۵۔ جبریہ ضابطے۔

(۱) ک (ا + ب + ج + ...) = ک ا + ک ب + ک ج + ...

(۲) (ا ± ب)^۲ = ا^۲ ± ۲ ا ب + ب^۲

(۳) ا^۲ - ب^۲ = (ا + ب) (ا - ب)

(۴) (ا + ب)^۲ + (ا - ب)^۲ = ۲ (ا^۲ + ب^۲)

(۵) (ا + ب)^۲ - (ا - ب)^۲ = ۴ ا ب

۶۔ دائرے۔

(۱) دائرہ کے مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملانیوالا خطِ مستقیم وتر پر عمود ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) دو متقاطع دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط اُن کے مشترک وتر کا عمودی منصف ہوتا ہے۔

(۳) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں ایک اور صرف ایک دائرہ کھنچ سکتا ہے۔

(۴) ایک ہی دائرہ میں یا مساوی دائروں میں مساوی قوسوں یا مساوی وتروں کے محاذی محیط (یا مرکز) پر مساوی زاویے بنتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۵) کسی دائرہ میں مساوی طول کے وتر مرکز سے مساوی الفصل ہوتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۶) دائرہ کا کوئی مماس اس کے نقطۂ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود وار ہوتا ہے۔

(۷) دائرہ کے کسی مماس اور اس کے نقطۂ تماس میں سے گزرنے والے

کسی وتر کا درمیانی زاویہ متبادل قطعہ کے اندر کے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

(۸) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو دائروں کے مرکز اور نقطۂ تماس ایک خطِ مستقیم میں ہوتے ہیں۔

(۹) دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایک ذوارِبعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۱۰) اگر ایک دائرہ کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ایک وتر کے حصّوں کا حاصل ضرب دوسرے وتر کے حصوں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۷ - طریق -

(۱) دو ثابت نقطوں سے مساوی الفصل نقطوں کا طریق معلومہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی مُنصِّف ہوتا ہے۔

(۲) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک دیے ہوئے خط سے ایک دیے ہوئے فاصلہ پر رہے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔

(۳) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو دو متقاطع خطوطِ مستقیم سے مساوی فاصلوں پر رہتا ہے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے مُنصِّفوں کا جوڑا ہے۔

(۴) ایک ایسے نقطہ کا طریق جس پر دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط کے محاذی ایک دیا ہوا زاویہ بنتا ہے دائرہ کی ایک قوس ہے۔

۸ - عملی مسئلے -

(۱) ایک دیے ہوئے خط یا زاویہ کی تنصیف کرنا۔

(۲) ایک دیے ہوئے خط پر ایک نقطے سے (جو دیے ہوئے خط پر یا اس کے باہر ہو) عمود کھینچنا۔

(۳) دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا۔

(۴) ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے ایک دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا۔

(۵) ایک دیے ہوئے خط کو متعدد مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔

(۶) مثلث کا بنانا جبکہ

(ا) تین ضلعے معلوم ہوں۔

(ب) دو ضلعے اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

(ج) ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے مساوی رقبہ کا مربع بنانا۔

(۸) ایک دیے ہوئے صحیح عدد کا جذر ہندسی طور پر معلوم کرنا۔

(۹) ایک دائرہ کھینچنا جو

(ا) ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرے۔

(ب) ایک مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا۔

(۱۱) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچنا۔

(۱۲) دو دیے ہوئے دائروں کے مشترک (راست اور متقاطع) مماس کھینچنا۔

دوسرا باب

نسبت و تناسب

۹۔ تعریفات اور ابتدائی اُصول۔

ایک مقدار کو اُسی جنس کی کسی دوسری مقدار کے ساتھ جو ربط یا رشتہ ہو اس کو ان مقداروں کی نسبت کہتے ہیں، جبکہ یہ رشتہ ان مقداروں کا اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھا جائے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کتنے گُنا یا کونسا حصہ ہے۔ مثلاً اگر دو ہم جنس مقداروں میں بالترتیب ا اور ب اکائیاں ہوں تو پہلی مقدار کو دوسری مقدار کے ساتھ جو نسبت ہے وہ کسر $\frac{ا}{ب}$ یا علامت ا : ب سے تعبیر ہوتی ہے۔ پہلی مقدار ا کو نسبت کا مقدم اور دوسری مقدار ب کو مؤخر کہتے ہیں۔

دو مقداروں کی نسبت اس اِکائی پر موقوف نہیں ہوتی جس کی رقوم میں ان مقداروں کو ناپا گیا ہے۔

یہ نہایت ضروری ہے کہ جن مقداروں کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں۔ مثلاً دونوں طول ہوں یا دونوں اوزان ہوں یا دونوں رقبے ہوں۔ ظاہر ہے کہ ایک خط کے طول کا مقابلہ دوسری جنس کی کسی مقدار مثلاً کسی مثلث کے رقبے کے ساتھ نہیں کیا جا سکتا۔

نیز نسبت ایک عدد مجرد ہے جو صحیح یا کسور ہو سکتا ہے مثلاً ۶ سمر اور ۸ سمر لمبے خطوط کے طولوں کی نسبت $\frac{6}{8}$ یا $\frac{3}{4}$ ہے نہ کہ $\frac{3}{4}$ سمر۔

اگر دو ہم جنس مقداروں کو ایک مشترک اکائی (جسے وفقِ مشترک کہتے ہیں) کی رقوم میں پورا پورا ناپا جا سکے تو ان مقداروں کو متوافق مقداریں کہتے ہیں اور ان مقداروں کی نسبت کو دو صحیح اعداد کی نسبت سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

ممکن ہے کہ دی ہوئی مقداروں میں کوئی وفقِ مشترک نہ ہو مثلاً اگر ایک مربع کا ضلع ۱ ہو تو اس کا وتر $\sqrt{2}$ ہوگا۔ $\sqrt{2}$ کی قیمت ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں نکالی جا سکتی اگرچہ یہ قیمت کسی مطلوبہ درجۂ صحت تک حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کے ضلع اور وتر کے طول ایک ہی اکائی کی رقوم میں ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں ناپے جا سکتے۔

ایسی مقداروں کو جن میں کوئی وفقِ مشترک نہ ہو غیر متوافق یا متباین مقداریں کہتے ہیں۔ دو غیر متوافق مقداروں کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک طور پر دو صحیح اعداد کی نسبت کی شکل میں بیان نہیں کیا جا سکتا لیکن ان کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجۂ صحت تک معلوم کیا جا سکتا ہے مثلاً اگر $\sqrt{2}$ کی تقریبی قیمت ۱٫۴۱۴۲ ڈالی جائے تو مربع کے ضلع اور وتر کی نسبت کی قیمت $\frac{1.0000}{1.4142}$ سے تعبیر ہوگی جہاں طول کی ایک چھوٹی اکائی ۰٫۰۰۰۱ کو بطور وفقِ مشترک لیا گیا ہے۔ مربع کے ضلع اور وتر کے طولوں کی نسبت کی اس سے بہتر تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر $\sqrt{2}$ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چار سے زیادہ مقاموں تک لی جائے۔

۱۰ ۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کی نسبت دوسری دو ہم جنس مقداروں کی نسبت کے مساوی ہو تو یہ چار مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔ یا یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ چار مقداریں تناسب میں ہیں مثلاً اگر ا : ب = لا : ما تو ا، ب، لا، ما متناسب کہلاتی ہیں۔

تعریف ۔ ا اور ما کو طرفین تناسب اور ب اور لا کو

وسطین تناسب کہتے ہیں۔

نوٹ ۔ کسی تناسب مثلاً ا : ب = لا : ما میں ہر نسبت کی مقداریں ایک ہی جنس کی ہونی چاہییں لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دونوں نسبتوں کی چاروں مقداریں ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً ایسا ہو سکتا ہے کہ ا اور ب دونوں رقبے ہوں اور لا اور ما دونوں طول ۔ اس صورت میں تناسب سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ پہلے رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلے طول کو دوسرے طول کے ساتھ ہے۔

۱۱۔ تعریفات

اگر چار مقداریں ا، ب، ج، د ایسی ہوں کہ ا : ب = ج : د تو د کو ا، ب، ج کا چوتھا تناسب کہتے ہیں۔

اگر تین مقداریں ا، ب، ج ایسی ہوں کہ ا : ب = ب : ج تو ج کو ا اور ب کا تیسرا تناسب کہتے ہیں اور ب کو ا اور ج کا وسط تناسب یا ہندسی اوسط کہتے ہیں۔

۱۲۔ علومِ متعارفہ

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے بھی مساوی ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر ا : ب = لا : ما اور ج : د = لا : ما تو ظاہر ہے کہ ا : ب = ج : د

(۲) اگر تین ہم جنس مقداریں ا، ب، ج ایسی ہوں کہ ا : ج = ب : ج تو ظاہر ہے کہ ا = ب

۱۳۔ تناسب کے ابتدائی مسائل

تناسب کے متعلق مندرجۂ ذیل ابتدائی مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب میں پائے جا سکتے ہیں۔

(ا) اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ ۔ تو

(۱) $\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ج}$ (عکس نسبت)

(۲) $\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د}$　　(تبدیل نسبت)

(۳) $اد = ب ج$

(۴) $\frac{ا+ب}{ب} = \frac{ج+د}{د}$　　(ترکیب نسبت)

(۵) $\frac{ا-ب}{ب} = \frac{ج-د}{د}$　　(تفصیل نسبت)

(۶) $\frac{ا+ب}{ا-ب} = \frac{ج+د}{ج-د}$　　(ترکیب وتفصیل نسبت)

(ب) اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = \ldots\ldots = ک$ تو

$$ک = \frac{ا+ج+ع+\ldots}{ب+د+ف+\ldots}$$

$$= \frac{م_1 ا + م_2 ج + م_3 ع + \ldots}{م_1 ب + م_2 د + م_3 ف + \ldots}$$ جہاں $م_1، م_2، م_3 \ldots$ کوئی عدد ہیں

۱۴۔ تعریف ۔ اگر ایک محدود خطِ مستقیم اب پر (ا اور ب کے درمیان) ایک نقطہ لا لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ اب کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر ہوئی ہے۔

ا　　　　لا　　　　ب

الا اور لاب خط اب کے دو حصے ہیں اور اِن کے طولوں کی علامت ایک ہی ہے کیونکہ دونوں کی سمت وہی ہے اس لیے الا اور لاب کی نسبت ایک مثبت مقدار ہو گی۔

اگر نقطہ ما اب ممدودہ پر (ا کی جانب یا ب کی جانب) لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ اب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر ہوئی ہے اس صورت میں اما اور ماب کی سمتیں مختلف ہیں اور خط اب کے دو حصے اما، ماب ہیں جو

مختلف العلامت ہیں۔ اس لئے اما اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہے۔

پس معلوم ہوا کہ اگر اب کے حصص کی نسبت کی علامت مثبت ہو تو تقسیم داخلی ہوگی اور اگر نسبت مذکور کی علامت منفی ہو تو تقسیم خارجی ہوگی۔

خارجی تقسیم کی صورت میں اگر ما ب کی طرف واقع ہو تو اما اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہوگی جس کی عددی قیمت ا سے بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر ما' ا کی طرف واقع ہو تو اما اور ما ب کی نسبت ایک منفی کسر واجب ہوگی۔

نوٹ - عام طور پر اگر اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو تو اختصار اور سہولت کے مدِ نظر خط کے حصوں کی نسبت کی علامت کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر اب محدود پر نقطہ ما ایسا ہو کہ اما اور ما ب کی نسبت $-\frac{۳}{۲}$ ہو تو اسے یوں بھی بیان کیا جاتا ہے کہ اب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر ۳ : ۲ کی نسبت میں ہوئی ہے۔

۱۵ مسئلہ - ایک دیے ہوئے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں داخلاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر اور خارجاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط اب کو داخلاً ایک دی ہوئی نسبت $\frac{م}{ن}$ میں دو مختلف نقطوں لا اور لاَ پر تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

از روئے مفروض $\frac{الا}{لاب} = \frac{م}{ن}$ اور $\frac{الاَ}{لاَب} = \frac{م}{ن}$

$$\therefore \frac{الا}{لاب} = \frac{الاَ}{لاَب}$$

$$\therefore \frac{الا + لاب}{لاب} = \frac{الاَ + لاَب}{لاَب} \quad \text{یعنی} \quad \frac{اب}{لاب} = \frac{اب}{لاَب}$$

∴ لا ب = لَا ب

پس لَا منطبق ہے لا پر یعنی لا اور لَا مختلف نقطے نہیں ہیں۔

اسی طرح خارجی تقسیم کی صورت میں بھی یہ مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔ اس کا ثبوت مندرجہ بالا طریقہ سے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۱

(۱) ایک خطِ مستقیم ۹ء۶ گ لمبا ہے اس کی داخلی تقسیم ۵ : ۷ کی نسبت میں کی گئی ہے۔ خط کے حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۴"، ۵ء۶گ)

(۲) ایک خطِ مستقیم ۴ء۵ سم لمبا ہے۔ اس کی خارجی تقسیم ۵ : ۴ کی نسبت میں کی گئی ہے، حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۲۲ء۵ سم، ۱۸ سم)

(۳) خطِ مستقیم اب ۶ء۴ سم لمبا ہے اسکو داخلاً لا پر اور خارجاً ما پر ایک ہی نسبت ۵ : ۳ میں تقسیم کیا گیا ہے، الا اور اما کے طول معلوم کرو اور تصدیق کرو کہ $\frac{\text{۲}}{\text{اب}} = \frac{\text{۱}}{\text{الا}} + \frac{\text{۱}}{\text{اما}}$ [جواب الا = ۴ سم، اما = ۱۶ سم]

(۴) اَ لمبے خطِ مستقیم کی داخلی تقسیم نسبت م : ن میں کی گئی ہے حصوں کے طول معلوم کرو (جواب $\frac{\text{اَم}}{\text{م}+\text{ن}}$ ، $\frac{\text{اَن}}{\text{م}+\text{ن}}$)

(۵) اَ لمبے خطِ مستقیم کی خارجی تقسیم نسبت م : ن میں کی گئی ہے، حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب $\frac{\text{اَم}}{\text{م}-\text{ن}}$ ، $\frac{\text{اَن}}{\text{م}-\text{ن}}$)

(۶) دو خطوطِ مستقیم اب اور ج د کی داخلی تقسیم ایک ہی نسبت میں بالترتیب لا اور ما پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ

(۱) اب : لاب = ج د : ماد

(۲) اب : الا = ج د : ج ما

(۷) اب ایک خطِ مستقیم ہے، ایک نقطہ لا ا سے ب کی طرف

مسلسل طور پر حرکت کرتا ہے، نسبت ا لا : لا ب کی قیمت کے تغیر پر بحث کرو۔
فرض کرو کہ ا ب کا وسطی نقطہ و ہے اگر نقطہ لا، نقطہ ا پر ہو تو نسبت ا لا : لا ب = ۰

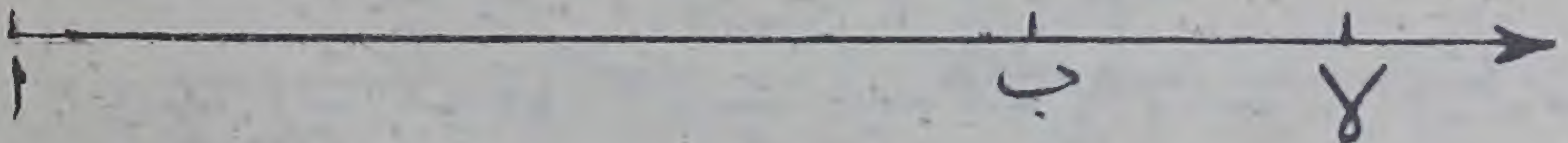
ا لا و ب

اگر نقطہ لا، ا اور و کے درمیان ہو تو نسبت ا لا : لا ب ایک مثبت کسر واجب ہو گی۔ جوں جوں نقطہ لا، و کے قریب آتا جاتا ہے یہ نسبت جو ا سے کم ہے بتدریج ا کے قریب آتی جاتی ہے اور جب لا، و پر منطبق ہوتا ہے تو نسبت ا لا : لا ب = ۱

اگر لا، و اور ب کے درمیان ہو تو نسبت ا لا : لا ب بڑی ہے ا سے، جوں جوں لا، ب کی طرف جاتا ہے نسبت ا لا : لا ب کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے، جب لا، ب کے نہایت قریب جاتا ہے تو اس نسبت کی قیمت بہت بڑی ہو جاتی ہے اور جب لا، ب پر منطبق ہو جاتا ہے تو لا ب کا طول صفر ہو جاتا ہے اور نسبت = ا لا : صفر۔ اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اِس نسبت کی قیمت لا تناہی ہے اور اسے علامت ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔ طالب علم کو بخوبی سمجھ لینا چاہیے کہ جن معنوں میں عام اعداد وجود رکھتے ہیں ان معنوں میں ∞ کوئی عدد نہیں ہے مندرجۂ بالا الفاظ کا مفہوم صرف یہ ہے کہ "لا کو ب کے کافی قریب لینے سے ا لا : لا ب کی قیمت کو کسی دیے ہوئے عدد سے (خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو) بڑا بنایا جا سکتا ہے"۔

پس معلوم ہوا کہ جب لا، ا سے ب تک مسلسل طور پر حرکت کرتا ہے تو نسبت ا لا : لا ب کی قیمت مسلسل طور پر صفر سے ∞ تک بدلتی ہے۔

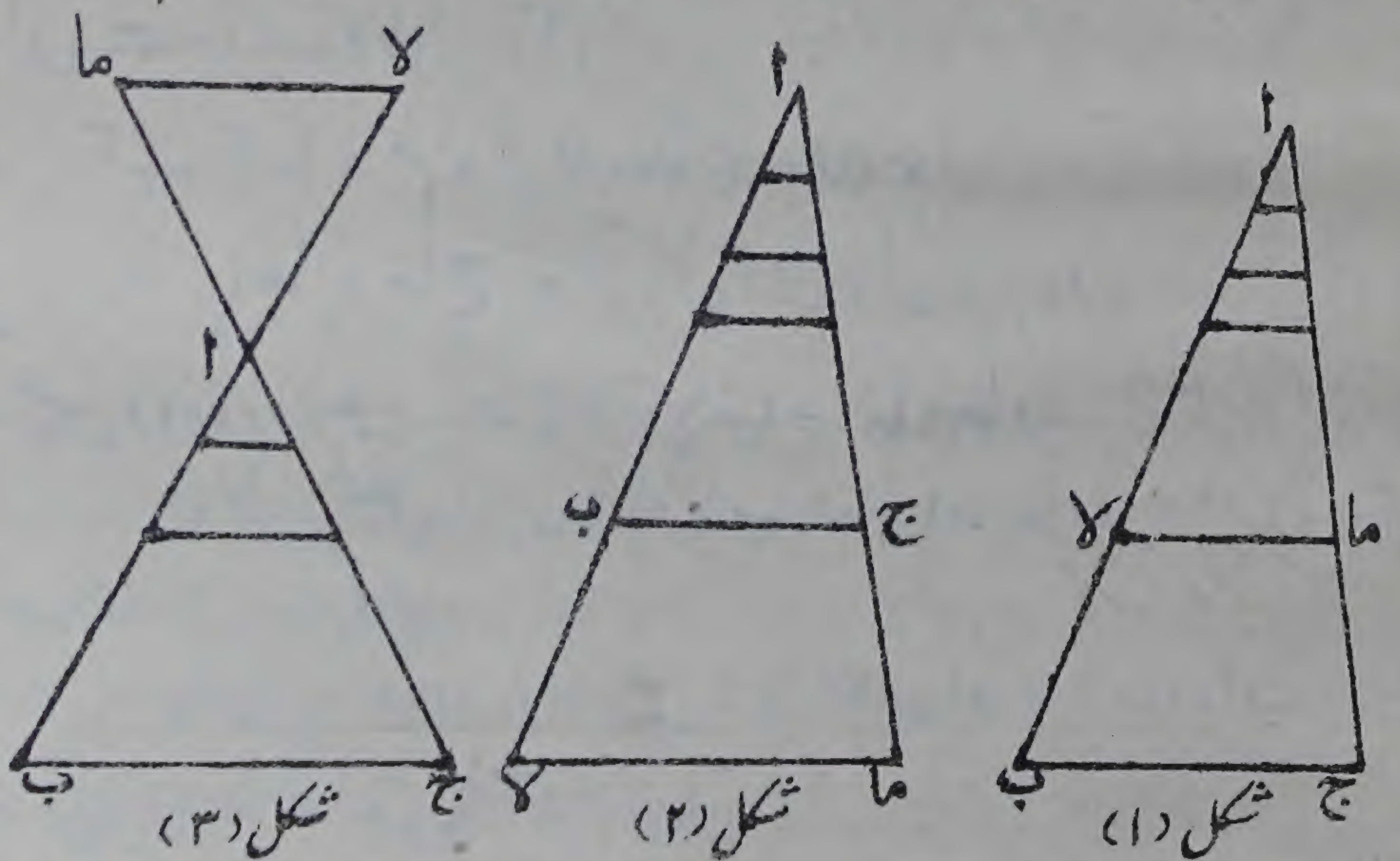
(۸) ا ب ایک خطِ مستقیم ہے۔ ایک نقطہ لا، ب سے روانہ ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے۔ (دیکھو نیچے کی شکل) نسبت ا لا : لا ب کے تغیر پر بحث کرو۔

ا ب لا

ظاہر ہے کہ یہ نسبت منفی ہو گی۔

جب لا' ب کے قریب ہے تو ا لا : لا ب بہت بڑی منفی مقدار ہے اور لا کو ب کے کافی قریب لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ جوں جوں لا دائیں جانب حرکت کرتا ہے اس نسبت کی عددی قیمت گھٹتی جاتی ہے لیکن ہمیشہ ا سے بڑی رہتی ہے۔ لا کو ب سے کافی دُور لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو ا کے جسقدر قریب چاہیں لا سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ جوں جوں لا' ب سے شروع ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے نسبت ا لا : لا ب کی عددی قیمت ∞ سے ا کے قریب آتی جاتی ہے۔

نوٹ۔ دیکھا جائے کہ نسبت ا لا : لا ب کی کسی عددی قیمت کے جواب میں جو ا سے بڑی ہے نقطۂ لا کے دو مقام ہیں جن میں ایک و اور ب کے درمیان ہے اور دوسرا اب ممدودہ پر ب کے دائیں جانب ہے۔

(۹) سوال ۸ کے مماثل طریقہ سے نسبت ا لا : لا ب کے تغیر پر بحث کرو جبکہ لا' ب ا ممدودہ پر ا سے شروع ہو کر بائیں جانب حرکت کرے۔

۱۶۔ مسئلہ: ایک خطِ مستقیم جو ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہے مثلث کے باقی دو اضلاع کو یا اضلاع ممدودہ کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

مثلث اب ج کے ضلع ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع اب، اج کو یا اضلاع ممدودہ کو بالترتیب لا اور ما پر کاٹتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ الا : لاب = اما : ماج۔

شکل ۱ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب، اج کی داخلی تقسیم کرتے ہیں۔

اشکال ۲ اور ۳ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب اور اج کی خارجی تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ الا اور لاب کے طولوں کا وفق مشترک طول ط ہے، نیز فرض کرو کہ الا میں طول ط، م دفعہ شریک ہے اور لاب میں طول ط، ن دفعہ شریک ہے۔

تب الا = م × ط اور لاب = ن × ط

∴ الا : لاب = م × ط : ن × ط = م : ن .... (۱)

الا اور لاب کو طول ط والے حصوں میں تقسیم کرو اور نقاط تقسیم میں سے ب ج کے متوازی خطوط کھینچو۔ ان خطوط کے ذریعہ اما اور ماج بالترتیب مساوی طول والے م اور ن حصوں میں تقسیم ہو جائیں گے۔ فرض کرو کہ ان حصوں میں سے ہر ایک کا طول = ل

تب اما = م × ل اور ماج = ن × ل

∴ اما : ماج = م × ل : ن × ل = م : ن .... (۲)

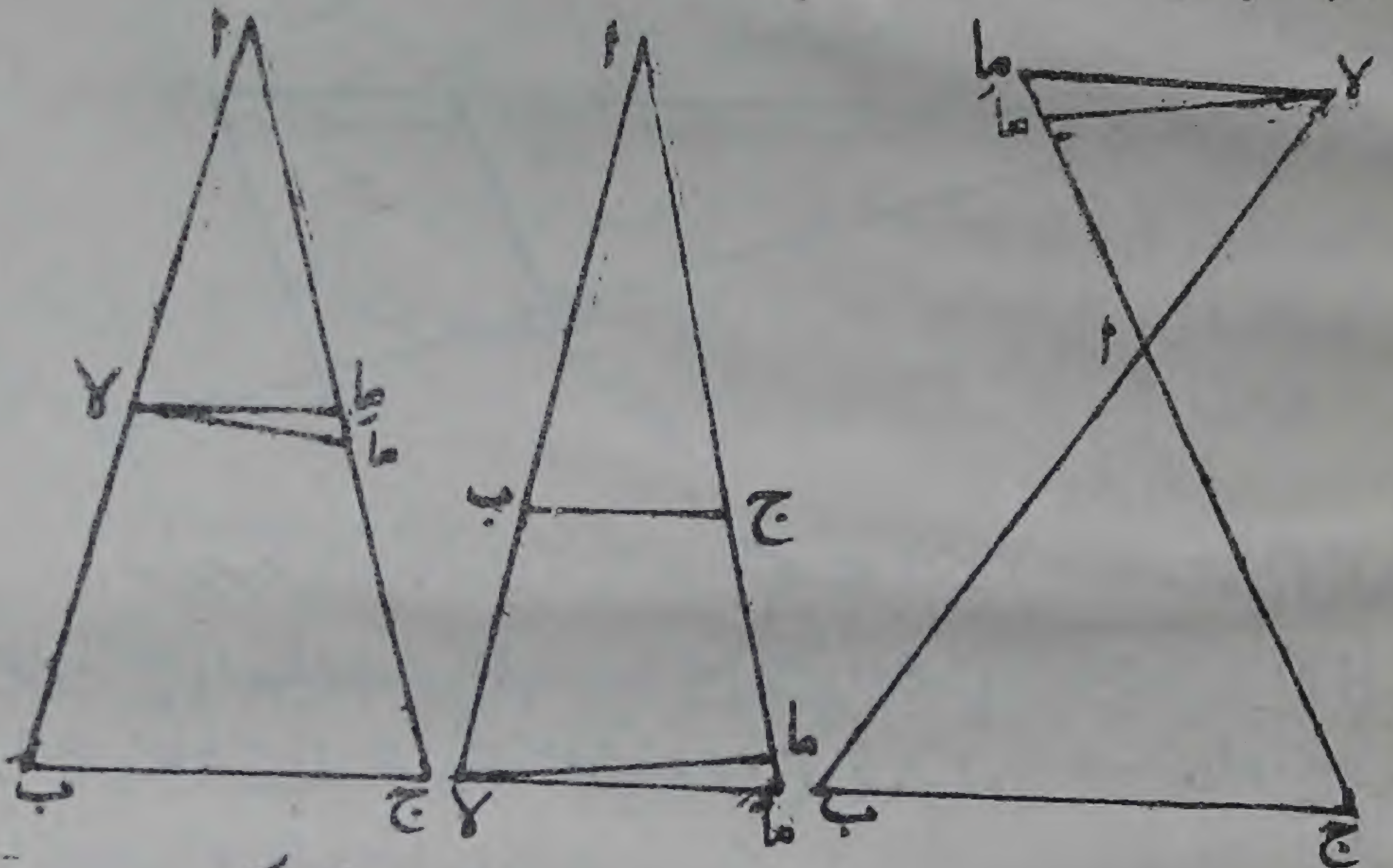
پس (۱) اور (۲) سے، الا : لاب = اما : ماب۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ شکل ۱ میں الا : لاب اور نیز اما : ماب دونوں مثبت ہیں اور مقدار میں مساوی ہیں۔

اشکال (۲) اور (۳) میں الا : لاب اور نیز اما : ماب دونوں منفی ہیں اور مقدار میں مساوی ہیں۔

مسئلۂ بالا کا عکس یہ ہے:۔ اگر مثلث اب ج کے اضلاع اب، اج پر بالترتیب نقاط لا اور ما اس طرح لیے جائیں کہ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

الا : لاب = اما : ماج تو لاما متوازی ہوگا ب ج کے

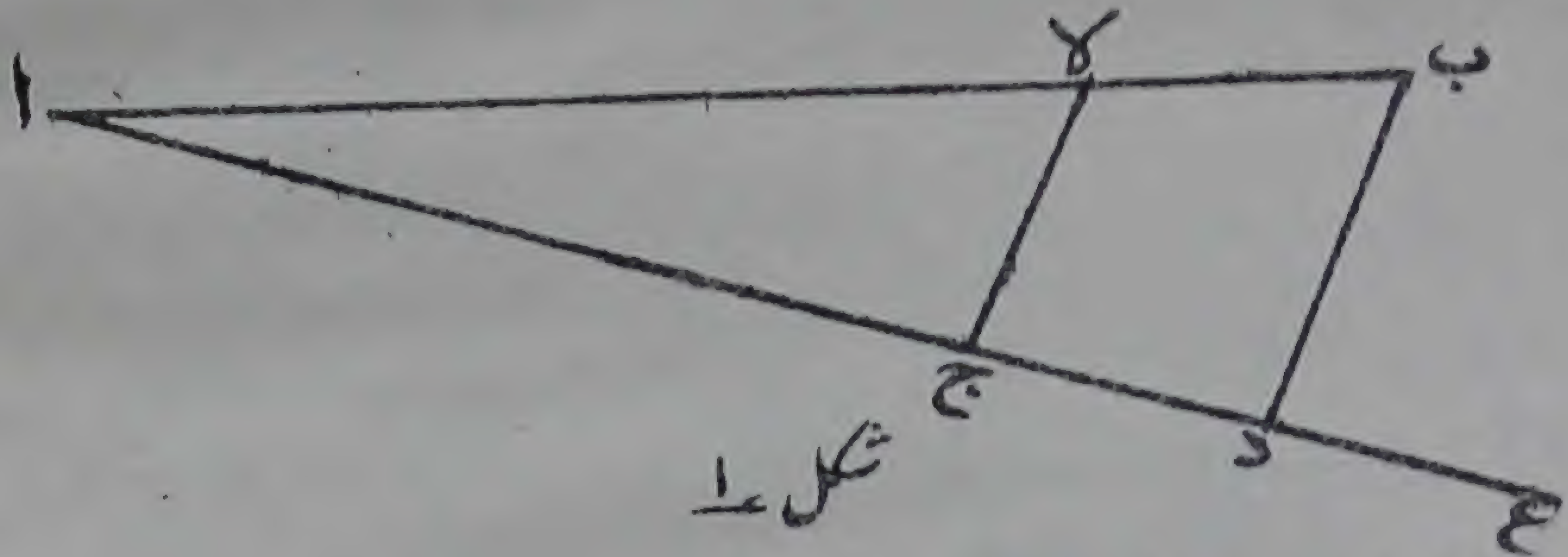
ا، لا، ما، ما، ب، ج، ا، ب، ج، لا، ما، ما، ما، لا، ما، ما، ا، ب، ج

اگر لاما متوازی نہیں ہے ب ج کے تو لاماَ متوازی ب ج کے کھینچو۔
فرض کرو کہ لاماَ ضلع اج سے ماَ پر ملتا ہے۔
چونکہ لاماَ ‖ ب ج اس لیے الا : لاب = اماَ : ماَج
لیکن دیا گیا ہے کہ الا : لاب = اما : ماج
اس لیے اما : ماج = اماَ : ماَج
اس لیے نقطۂ ماَ منطبق ہے نقطہ ما پر
پس ثابت ہوا کہ لاما متوازی ہے ب ج کے

نوٹ: مسئلۂ بالا کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ الا اور لاب متوافق مقداریں ہیں۔ اگر الا اور لاب غیر متوافق ہوں تو کسی بہت چھوٹی اکائی کی رقوم میں ان دونوں طولوں کو ناپنے سے الا : لاب کی تقریبی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے اور ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اما : ماج کی تقریبی قیمت الا : لاب کی تقریبی قیمت کے مساوی ہے۔

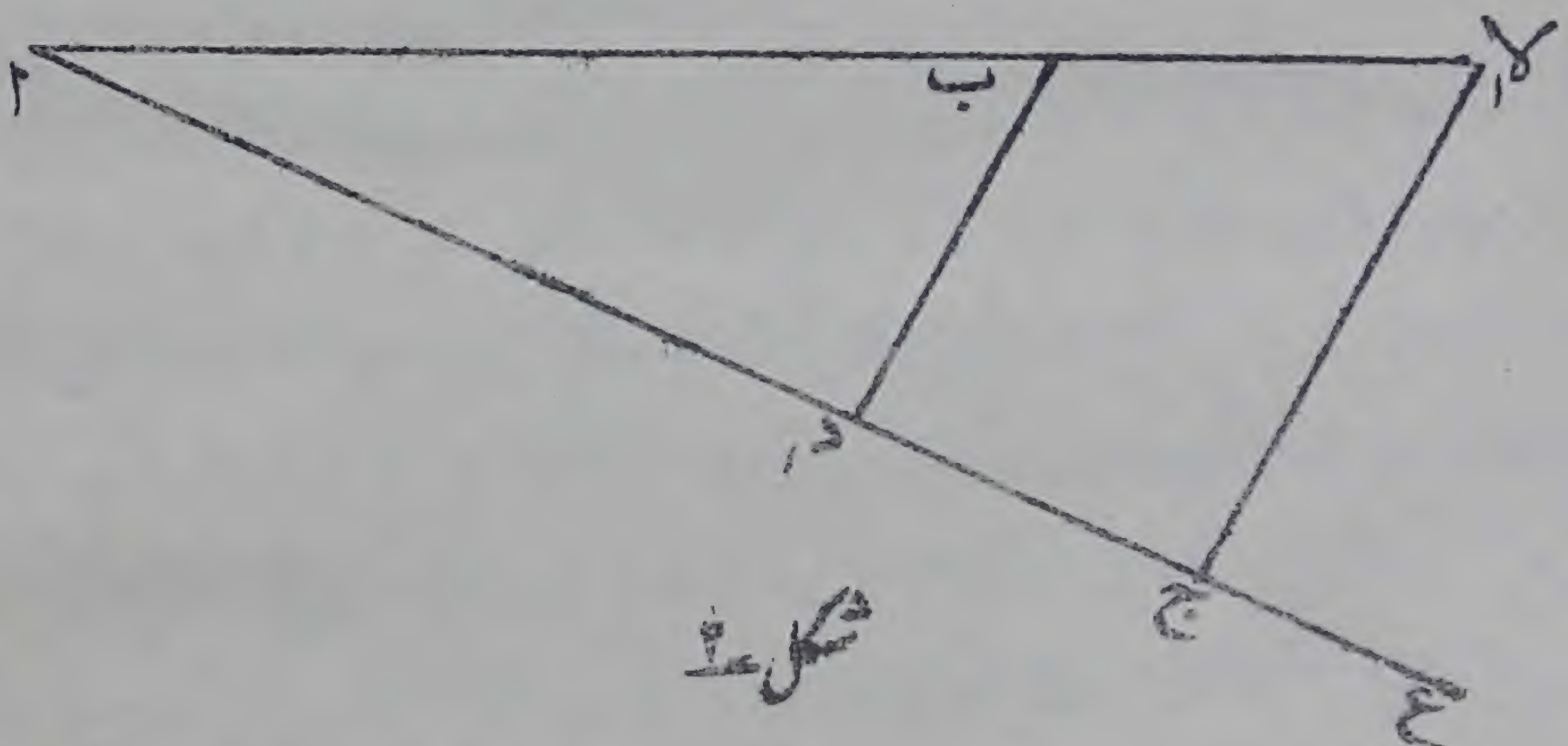
نتیجہ صریح: اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط کو دو خطوط مستقیم قطع کریں تو ایک قاطع پر کے مقطوعوں کے طول دوسرے قاطع پر کے متناظر مقطوعوں کے

طولوں کے تناسب ہونگے۔

۱۷ مسئلۂ عملی۔ ایک دیے ہوئے خط کو داخلاً اور خارجاً ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔
داخلی تقسیم [دیکھو شکل ۱]

ا، لا، ب، ج، د، ع

شکل ۱

فرض کرو کہ اب ایک دیا ہوا خطِ مستقیم ہے۔ اِسے داخلاً نسبت م : ن میں تقسیم کرنا مقصود ہے۔ اسے کوئی اور خط اع کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر اع پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ اج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں۔

د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج لا کھینچو جو اب سے لا پر ملے تب نقطہ لا خط اب کو داخلاً دی ہوئی نسبت م : ن میں تقسیم کریگا۔
چونکہ ج لا متوازی ہے مثلث اب د کے ضلع د ب کے
اس لیے ال : لاب = اج : ج د = م : ن
خارجی تقسیم [دیکھو شکل ۲]

ا، ب، لا، د، ج، ع

شکل ۲

ا میں سے کوئی اور خط اع کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر اع پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ اج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں (خارجی تقسیم کی صورت میں اج اور ج د کی سمتیں مخالف ہونگی)۔

د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج لا کھینچو جو اب مطلوبہ سے لا پر ملے

تب نقطہ لا خط اب کو خارجاً دی ہوئی نسبت م : ن میں تقسیم کریگا۔

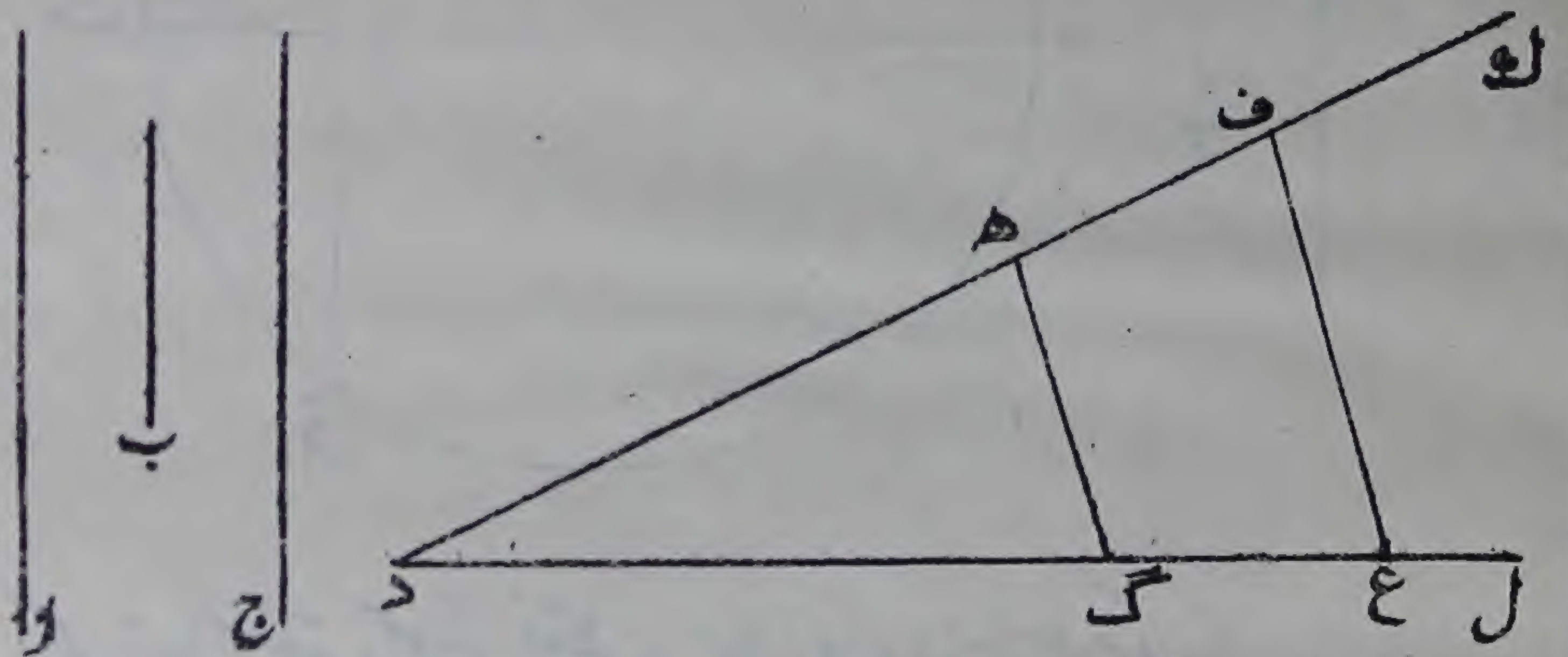
چونکہ ج لا متوازی ہے مثلث اب د کے ضلع د ب کے

اس لیے الا : لا ب = اج : ج د = م : ن

پس اب کی داخلی تقسیم لا پر اور خارجی تقسیم لا پر دی ہوئی نسبت م : ن میں ہوتی ہے

نوٹ۔ مان لیا گیا ہے کہ دی ہوئی نسبت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر کی جاسکتی ہے۔

۱۸۔ مسئلۂ عملی۔ تین دیے ہوئے خطوط ا، ب، ج کا چوتھا متناسب معلوم کرنا۔

کوئی دو متقاطع خط دل، دك کھینچو۔ دل پر نقاط گ اور ع

ایسے معلوم کرو کہ دگ = ا اور گ ع = ب اور دك پر نقطہ ھ ایسا معلوم کرو کہ د ھ = ج

گ ھ کو ملاؤ اور گ ھ کے متوازی ع ف کھینچو جو دك سے ف پر ملے۔

تب ھ ف چوتھا متناسب ہوگا معلومہ خطوط ا، ب، ج کا

چونکہ مثلث د ع ف میں گ ھ // ع ف

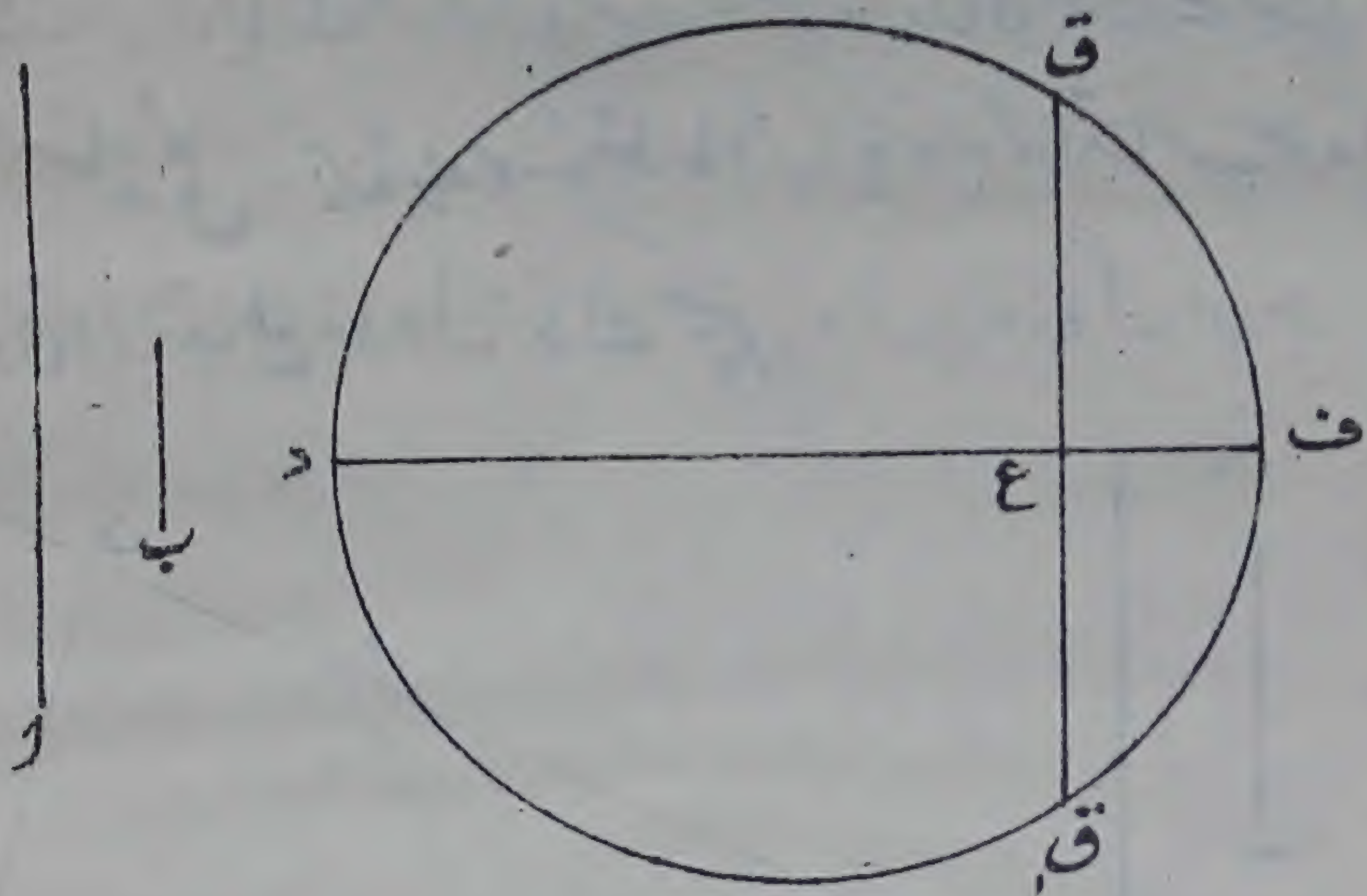
اس لیے دگ : گ ع = د ھ : ھ ف

یعنی ا : ب = ج : ھ ف

پس ثابت ہوا کہ ھ ف چوتھا تناسب ہے ا، ب، ج کا

نوٹ: تیسرے تناسب کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ا اور ب کا تیسرا تناسب فی الحقیقت ا، ب، ب کا چوتھا تناسب ہے۔

اس لیے مندرجہ بالا مسئلۂ عملی کے طریقہ سے دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم ا اور ب کا تیسرا تناسب معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۹۔ مسئلۂ عملی۔ دو دیے ہوئے خطوط ا اور ب کے درمیان وسطِ تناسب معلوم کرنا۔

ایک خطِ مستقیم پر تین نقطے د، ع، ف ایسے معلوم کرو کہ

د ع = ا اور ع ف = ب

د ف کو قطر مان کر دائرہ کھینچو اور ع میں سے ایک خط ق ع ق، کھینچو جو د ف پر عمود ہے اور دائرہ سے ق اور ق، پر ملتا ہے۔

تب ع ق وسطِ تناسب ہوگا دیے ہوئے خطوط ا اور ب کے درمیان۔

چونکہ قطر د ف عمود ہے وتر ق ق، پر

اس لیے ق ع = ع ق،

نیز ق ق، اور د ف کے حصوں کے حاصل ضرب مساوی ہیں

یعنی ق ع × ع ق = د ع × ع ف

یعنی ع ق^2 = ا × ب　　یعنی ا : ع ق = ع ق : ب

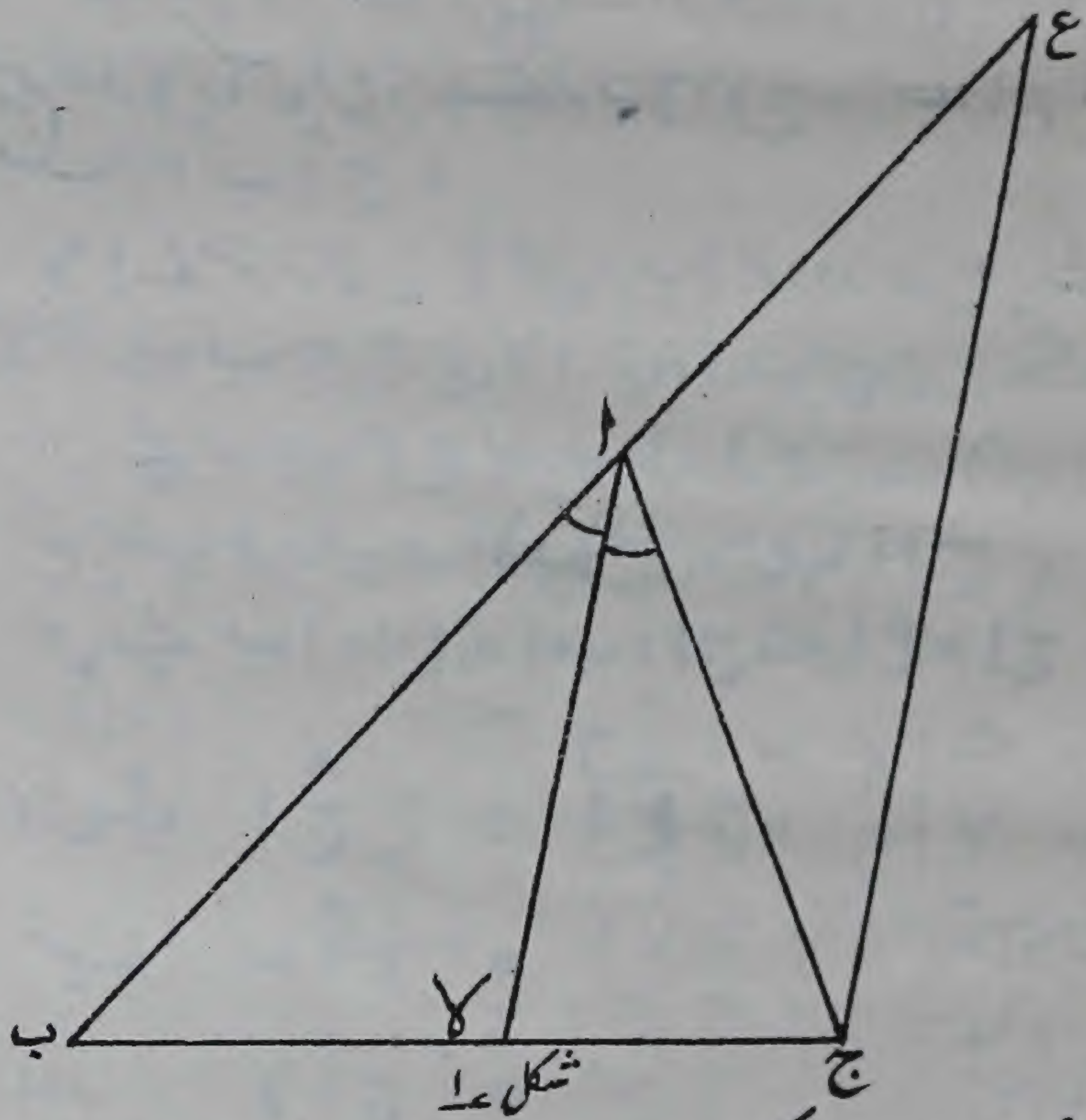
پس معلوم ہوا کہ ع ق وسطِ متناسب ہے ا اور ب کے درمیان۔

نوٹ: مندرجۂ بالا عمل کے متبادل ثبوت کے لیے دیکھو اشکلہ ع۳ مثال ۱۰۔

۲۰۔ مسئلہ۔ مثلث کے کسی زاویہ کا داخلی (خارجی) ناصف مقابل کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں داخلاً (خارجاً) تقسیم کرتا ہے۔

حصۂ اول (داخلی ناصف) (دیکھو شکل ع۱)

ع
ا
ب　لا　ج

شکل ع۱

مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا داخلی ناصف مقابل کے ضلع ب ج سے نقطۂ لا پر ملتا ہے ثابت کرنا ہے کہ

ب لا : لا ج = ا ب : ا ج

لا ا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا ممدودہ سے ع پر ملے

تب ب اْ لا = ا عْ ج (متناظر زاویے)

اور لا اْ ج = ا جْ ع (متبادل زاویے)

لیکن حسبِ مفروض ب اْ لا = لا اْ ج

اس لیے ا عْ ج = ا جْ ع

∴ ا ج = ا ع .... (۱)

چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ضلع ج ع کے

اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

= ب ا : ا ج بموجب (۱)۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

مندرجۂ بالا مسئلہ کا عکس۔— اگر مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ ب لا : لا ج = ا ب : ا ج تو ا لا داخلی ناصف ہوگا ب اْ ج کا

لا ا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا ممدودہ سے ع پر ملے

چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ضلع ج ع کے

اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

لیکن حسبِ مفروض ب لا : لا ج = ا ب : ا ج

اس لیے ب ا : ا ع = ا ب : ا ج یعنی ا ع = ا ج

اس لیے ا جْ ع = ا عْ ج

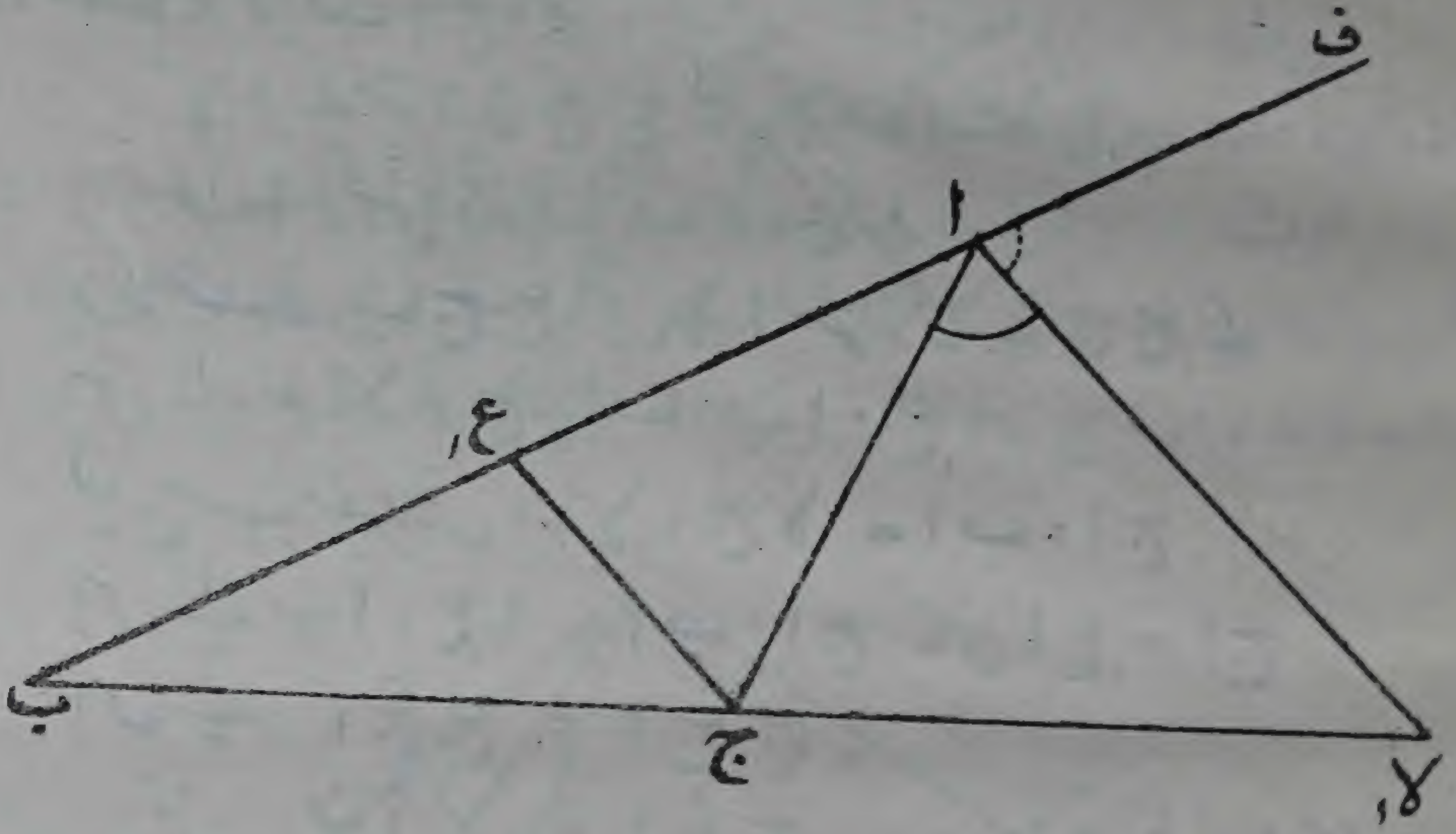
نیز ب اْ لا = ا عْ ج (متناظر زاویے)

اور لا اْ ج = ا جْ ع (متبادل زاویے)

اس لیے ب اْ لا = لا اْ ج

یعنی ا لا داخلی ناصف ہے ب اْ ج کا۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

حصہ دوم (خارجی ناصف) (دیکھو شکل ۲۱)

شکل ۲۱

مثلث ا ب ج کے زاویہ ب اج کا خارجی ناصف مقابل کے ضلع ب ج سے
لا، پر ملتا ہے ثابت کرنا ہے کہ ب لا، : ج لا، = اب : اج
لا، ا کے متوازی ج ع، کھینچو جو اب سے ع، پر ملے۔
ب ا کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو۔

تب ف اˆ لا، = ا عˆ، ج (متناظر زاویے)
اور لا، اˆ ج = ا جˆ ع، (متبادل زاویے)
لیکن حسب مفروض ف اˆ لا، = لا، اˆ ج
اس لیے ا عˆ، ج = ا جˆ ع،
اس لیے اج = اع، .... (۱)
چونکہ مثلث ب ج ع، میں لا، ا متوازی ہے ج ع، کے
اس لیے ب لا، : ج لا، = ب ا : ع، ا
= اب : اج بموجب (۱)

یہی ثابت کرنا تھا۔

مندرجہ بالا مسئلہ کا عکس ۔ اگر مثلث اب ج میں ضلع ب ج کی خارجی تقسیم نقطہ لا، پر اس طرح کی جائے کہ ب لا، : ج لا، = اب : اج تو الا، خارجی ناصف ہوگا ب اٰ ج کا

لا، ا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا سے ع، پر ملے
ب ا کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو ۔
چونکہ مثلث ب ج ع، میں لا، ا متوازی ہے ج ع، کے
اس لیے ب لا، : ج لا، = ب ا : ع، ا
لیکن حسبِ مفروض ب لا، : ج لا، = اب : اج
اس لیے ب ا : ع، ا = اب : اج یعنی اع، = اج
اس لیے اجٰ ع، = اعٰ، ج
نیز ف اٰ لا، = اعٰ، ج (متناظر زاویے)
اور لا، اٰ ج = اجٰ ع، (متبادل زاویے)
اس لیے ف اٰ لا، = لا، اٰ ج
یعنی الا، خارجی ناصف ہے ب اٰ ج کا ۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ : اگر مثلث اب ج میں اب = اج تو ب اٰ ج کا داخلی ناصف مقابل کے ضلع ب ج کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے ۔ یعنی قاعدہ کو اضلاع کی نسبت یعنی ۱ : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے ۔

نیز ب اٰ ج کا خارجی ناصف قاعدہ ب ج کے متوازی ہے اور اس لیے قاعدہ سے لا متناہی پر ملتا ہے ۔ یعنی قاعدہ کی خارجی تقسیم ۱ : ۱ کی نسبت میں کرتا ہے، یہ بھی مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے ۔

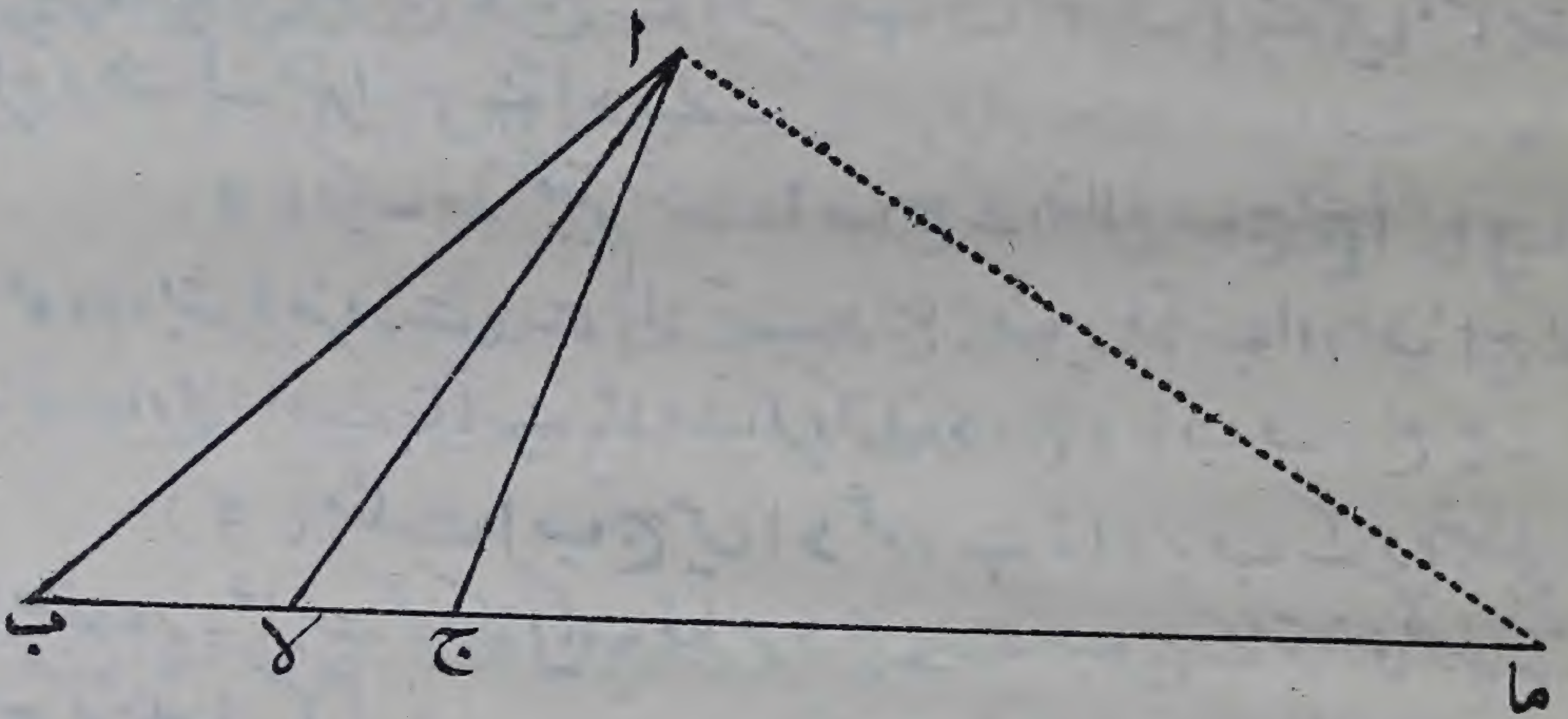
۲۱ ۔ **تعریف** :۔ اگر ایک خطِ مستقیم اب کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر اور خارجی تقسیم نقطہ ما پر اس طرح کی جائے کہ الا : لاب = اما : ب ما تو کہا جاتا ہے کہ اب کی موسیقی تقسیم لا اور ما پر کی گئی ہے ۔

ما ب لا ا

بلحاظ ا اور ب کے نقاط لا اور ما ایک دُوسرے کے موسیقی مزدوج کہلاتے ہیں ۔

نوٹ (۱) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مثلث کے کسی زاویہ کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں ۔

نوٹ (۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ ب ج پر کوئی مثلث ا ب ج ایسا بنایا گیا ہے کہ اب : اج ایک مستقل مقدار ہے ۔ اگر ب اَ ج کے داخلی اور خارجی ناصف قاعدہ ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملیں تو لا اور ما رأس ا

ا
ب لا ج ما

کے تمام مقاموں کے لیے ثابت نقطے ہونگے ۔ نیز لا اَ ما قائمہ ہے اس لیے دی ہوئی شرائط کے ماتحت رأس ا کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر لا ما ہے ۔

نوٹ (۳) اگر ایک دیے ہوئے خط ب ج کی موسیقی تقسیم لا ما پر کی جائے اور لا ما قطر پر کے دائرہ پر کوئی نقطہ ا ہو تو ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اب : اج ایک مستقل مقدار ہے (دیکھو دفعہ ۹۳ باب ۷) ۔

لا ما کو قطر مان کر کھنچے ہوئے دائرہ کو اپولوئی نُس (Appolonius) کا دائرہ کہتے ہیں اور یہ دائرہ اُس نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مستقل نسبت میں رہتے ہیں ۔

امثلہ ۲

(۱) ثابت کرو کہ مثلث کے کسی دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط

تیسرے ضلع کے متوازی ہے۔

(۲) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط قاعدہ کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ منحرف کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

(۴) مثلثات ا ب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی طرف واقع ہیں قاعدہ کے کسی نقطۂ ع میں سے ب ا اور ب د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو اج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ف گ متوازی ہے اد کے۔

(۵) ایک خطِ مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب (ممدودہ بشرطِ ضرورت) سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے اور اب، اج کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب د : ج د = ب ف : ج ع۔

(۶) مثلث ا ب ج میں اد عمود ہے زاویہ ب کے داخلی ناصف پر۔ ثابت کرو کہ ایک خط جو د میں سے ب ج کے متوازی کھینچا جائے اج کی تنصیف کرتا ہے۔

(۷) ا، ب، ج، د چار ہم خط نقطے ہیں (اسی ترتیب میں)۔ اس خط پر ایک نقطہ و ایسا معلوم کرو کہ او : و د = ب و : و ج

(۸) مثلث ا ب ج میں لا ما متوازی ہے ب ج کے اور اب، اج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتا ہے۔

(ا) اگر اب = ۶٫۳″، اج = ۴٫۲″ اور ا لا = ۱٫۲″ تو اما محسوب کرو [جواب ۴٫۱]

(ب) اگر اب = ۲″، اج = ۵٫۱″ اور اما = ۹٫۰″ تو ب لا محسوب کرو۔ [جواب ۸٫۰″]

(ج) اگر ا لا : لا ب = ۸ : ۳ اور اج = ۸٫۸ سمر تو اما محسوب کرو۔ [جواب ۴٫۶ سمر]

(۹) مثلث ا ب ج میں اَ = ۵ء۱ً، بَ = ۴ء۲ً اور جَ = ۶ء۳ً زاویہ ا کے داخلی اور خارجی منقّف ضلع ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ب لا اور ب ما کے طول محسوب کرو۔ [جواب ۹ًَ، ۵ء۴ً]

(۱۰) مثلث ا ب ج کا ایک وسطانیہ ا د ہے زاویوں ا د ب اور ا د ج کے داخلی ناصف ا ب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے۔

(۱۱) اگر ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے زاویوں ا اور ج کے ناصف ب د پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویوں ب اور د کے ناصف ا ج پر ملینگے۔

(۱۲) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ

(ا) مثلث کے تینوں زاویوں کے داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) مثلث کے دو زاویوں کے خارجی ناصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

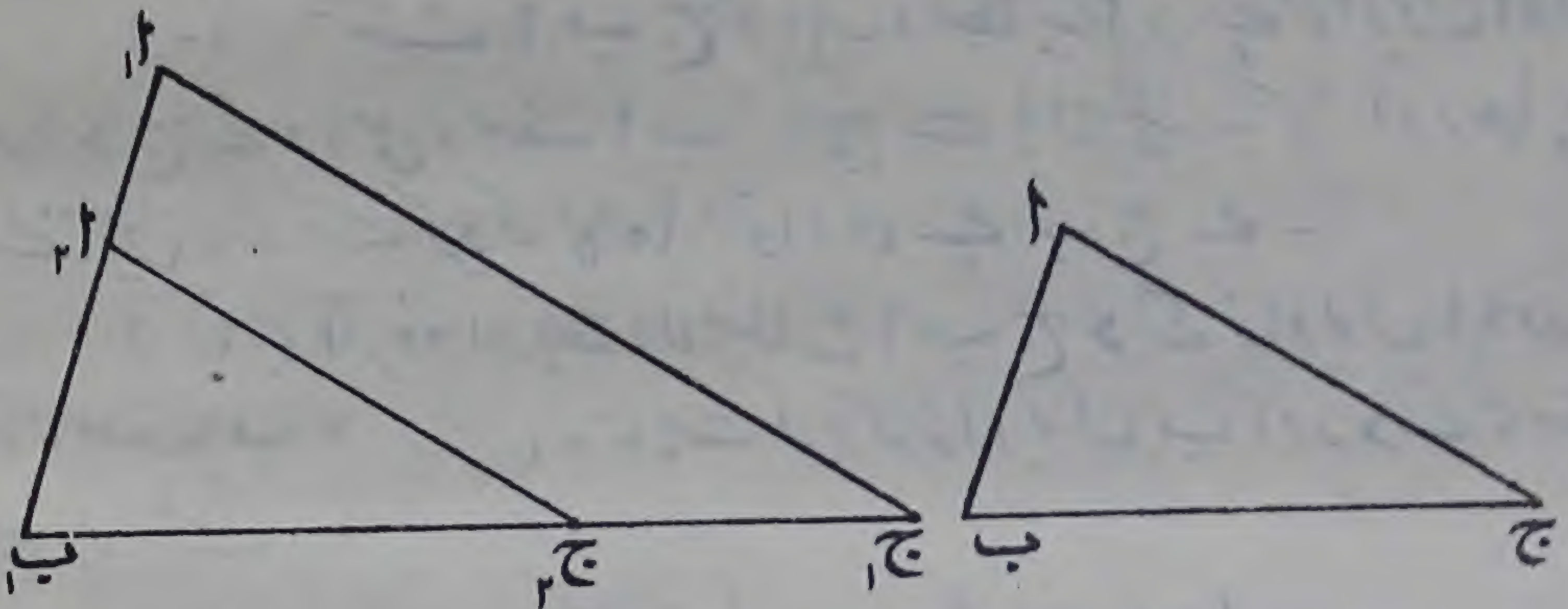
(۱۳) مثلث کا قاعدہ، رأسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت معلوم ہیں، مثلث بناؤ۔

۲۲۔ متشابہ اشکال۔

تعریفات۔ اگر دو مستقیم الاضلاع اشکال ایسی ہوں کہ ایک کے زاویے دوسری شکل کے زاویوں کے جدا جدا ایک ہی ترتیب میں مساوی ہوں اور ایک کے ضلعے دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے متناسب ہوں تو یہ اشکال ایک دوسری کے متشابہ کہلاتی ہیں یا مختصراً اِن کو متشابہ اشکال کہتے ہیں۔

اگر ایک مستقیم الاضلاع شکل کے زاویے جدا جدا ایک ہی ترتیب میں

دوسری مستقیم الاضلاع شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں تو یہ اشکال متساوی الزوایا کہلاتی ہیں۔

۲۳ ۔ مسئلہ ۔ اگر دو مثلث متساوی الزوایا ہوں تو اُن کے نظیر کے ضلعے متناسب ہوتے ہیں۔

مثلثات ا ب ج، $\text{ا}_1\text{ب}_1\text{ج}_1$ میں $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ا}}_1$، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب}}_1$ اور (لازماً) $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{ج}}_1$ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\text{ج}_1} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ج}_1\text{ا}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ب}_1}$$

$\text{ب}_1\text{ا}_1$ پر نقطہ ا_2 ایسا لو کہ $\text{ب}_1\text{ا}_2 = \text{ب ا}$ اور $\text{ب}_1\text{ج}_1$ پر نقطہ ج_2 ایسا لو کہ $\text{ب}_1\text{ج}_2 = \text{ب ج}$،

$\text{ا}_2\text{ج}_2$ کو ملاؤ۔

تب مثلثات $\text{ب}_1\text{ا}_2\text{ج}_2$ اور ب ا ج ہر طرح سے باہم مساوی ہونگے۔

اِس لیے $\text{ب}_1\hat{\text{ا}}_2\text{ج}_2 = \text{ب}\hat{\text{ا}}\text{ج}$

اور حسبِ مفروض $\text{ب}\hat{\text{ا}}\text{ج} = \text{ب}_1\hat{\text{ا}}_1\text{ج}_1$

اِس لیے $\text{ب}_1\hat{\text{ا}}_2\text{ج}_2 = \text{ب}_1\hat{\text{ا}}_1\text{ج}_1$

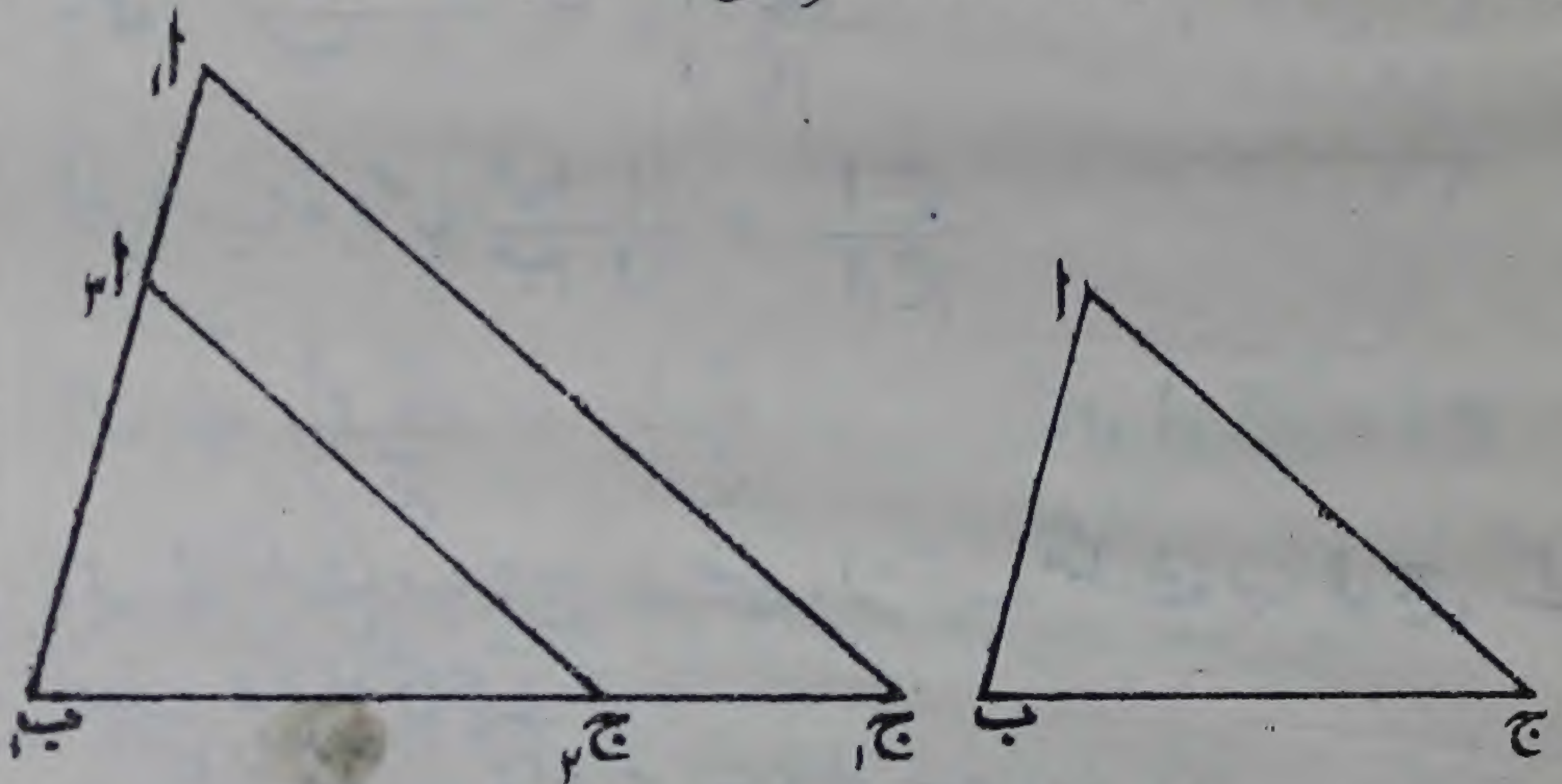
اس لیے $\text{ا}_2\text{ج}_2 \parallel \text{ا}_1\text{ج}_1$

اِس لیے $\frac{\text{ب}_1\text{ج}_2}{\text{ب}_1\text{ج}_1} = \frac{\text{ب}_1\text{ا}_2}{\text{ب}_1\text{ا}_1}$

یعنی $\frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\,\text{ج}_1} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ب}_1\,\text{ا}_1}$ .... (۱)

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{\text{ب ا}}{\text{ب}_1\,\text{ا}_1} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا}_1\,\text{ج}_1}$ ...... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\,\text{ج}_1} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ج}_1\,\text{ا}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\,\text{ب}_1}$ ، جو ثابت کرنا تھا۔

۲۴۔ مسئلہ ۔ اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے متناسب ہوں تو متناظر اضلاع کے متقابل کے زاویے مساوی ہونگے۔

مثلثات ا ب ج اور $\text{ا}_1\,\text{ب}_1\,\text{ج}_1$ میں $\frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\,\text{ج}_1} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ج}_1\,\text{ا}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\,\text{ب}_1}$

ثابت کرنا ہے کہ $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ا}}_1$ ، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب}}_1$ اور (لازماً) $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{ج}}_1$

$\text{ب}_1\,\text{ا}_1$ پر نقطہ ا_2 ایسا لو کہ $\text{ب}_1\,\text{ا}_2 = \text{ب ا}$ اور $\text{ب}_1\,\text{ج}_1$ پر نقطہ ج_2 ایسا لو کہ $\text{ب}_1\,\text{ج}_2 = \text{ب ج}$ ۔

$\text{ا}_2\,\text{ج}_2$ کو ملاؤ۔

چونکہ حسب مفروض $\frac{\text{ب ا}}{\text{ب}_1\,\text{ا}_1} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\,\text{ج}_1}$

اس لیے $\frac{\text{ب}_1\,\text{ا}_2}{\text{ب}_1\,\text{ا}_1} = \frac{\text{ب}_1\,\text{ج}_2}{\text{ب}_1\,\text{ج}_1}$ (حسب عمل)

اس لیے ا$_2$ ج$_2$ $\parallel$ ا$_1$ ج$_1$

یعنی مثلثات ب ا$_2$ ج$_2$ اور ب ا$_1$ ج$_1$ میں ب $\hat{\text{ا}}_2$ ج$_2$ = ب $\hat{\text{ا}}_1$ ج$_1$

اور ب $\hat{\text{ج}}_2$ ا$_2$ = ب $\hat{\text{ج}}_1$ ا$_1$

اس لیے یہ مثلثات متساوی الزوایا ہیں۔

اس لیے $\frac{\text{ب ا}_2}{\text{ب ا}_1} = \frac{\text{ا}_2\text{ ج}_2}{\text{ا}_1\text{ ج}_1}$

یعنی $\frac{\text{ب ا}}{\text{ب ا}_1} = \frac{\text{ا}_2\text{ ج}_2}{\text{ا}_1\text{ ج}_1}$

لیکن حسبِ مفروض $\frac{\text{ب ا}}{\text{ب ا}_1} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا}_1\text{ ج}_1}$

اس لیے $\frac{\text{ا}_2\text{ ج}_2}{\text{ا}_1\text{ ج}_1} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا}_1\text{ ج}_1}$ یعنی ا$_2$ ج$_2$ = ا ج

اس لیے مثلث ب ا ج کے ضلعے بالترتیب مثلث ب ا$_2$ ج$_2$ کے ضلعوں کے مساوی ہیں۔

اس لیے یہ مثلثات آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

اس لیے ب $\hat{\text{ا}}$ ج = ب $\hat{\text{ا}}_2$ ج$_2$ = ب $\hat{\text{ا}}_1$ ج$_1$

اور ب $\hat{\text{ج}}$ ا = ب $\hat{\text{ج}}_2$ ا$_2$ = ب $\hat{\text{ج}}_1$ ا$_1$

اور $\hat{\text{ب}}$ = $\hat{\text{ب}}_1$

پس ثابت ہوا کہ مثلثات ا ب ج اور ا$_1$ ب$_1$ ج$_1$ متساوی الزوایا ہیں۔

۲۵ - متشابہ اشکال پر نوٹ - تعریف سے ظاہر ہے کہ متشابہ اشکال کے لیے دو شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

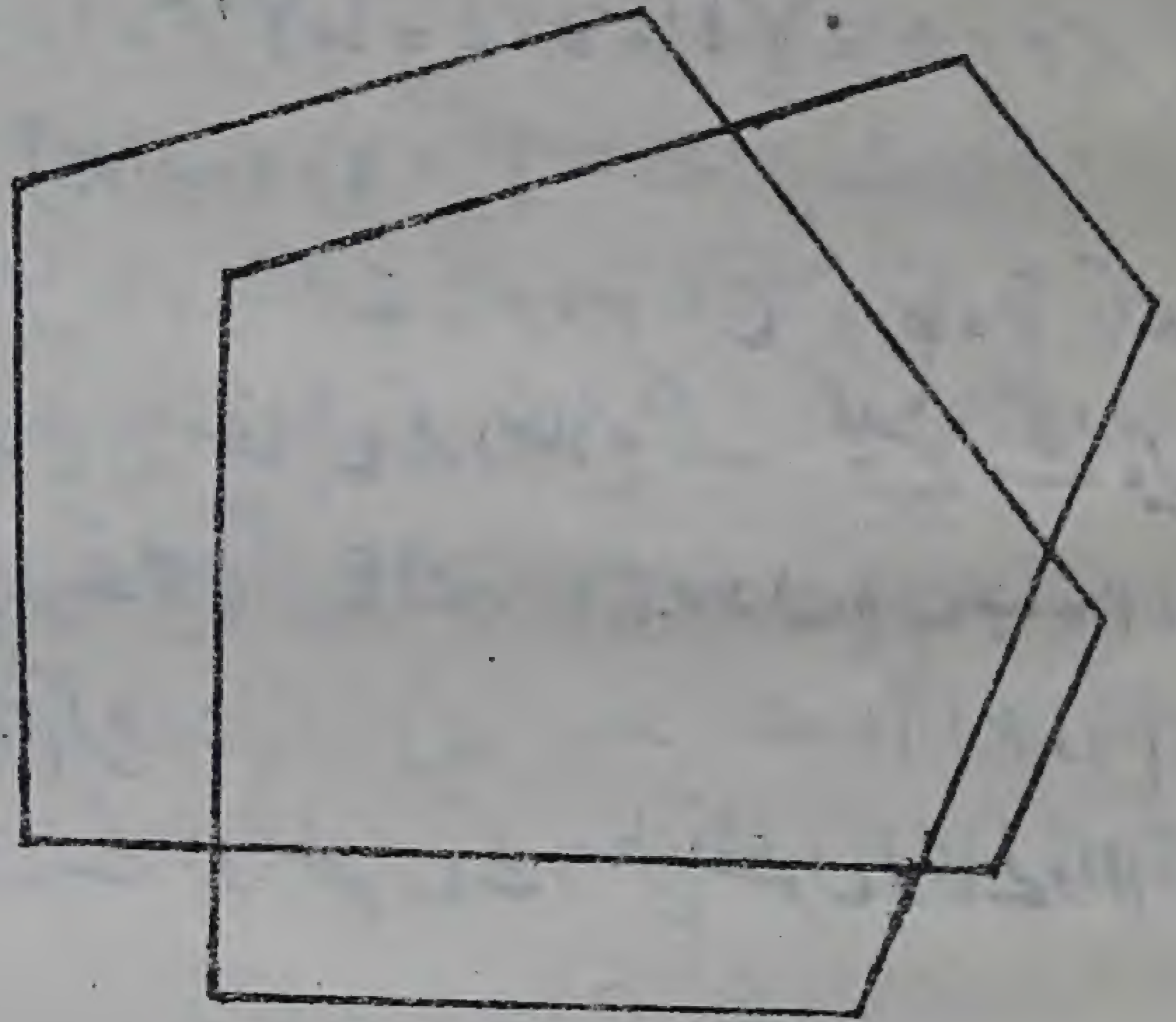
(۱) ایک شکل کے زاویے ایک ہی ترتیب میں جدا جدا دوسری شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

(۲) ایک شکل کے ضلعے متناسب ہوں دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے۔

دفعات ۲۳ اور ۲۴ سے ظاہر ہے کہ مثلثات کی صورت میں مندرجہ بالا شرائط میں سے کسی ایک شرط کے پورا ہونے پر دوسری شرط لازماً خود بخود پوری ہوتی ہے۔ لیکن تین سے زیادہ ضلعوں والی اشکال کی صورت میں ان کے باہم متشابہ ہونے کے لیے دونوں شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

اس امر کی توضیح اشکال ذیل سے ہوتی ہے۔

شکل ع۲

شکل ع۱

شکل ع۱ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۱) کو پورا کرتے ہیں اور شرط (۲) کو پورا نہیں کرتے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع متشابہ نہیں ہیں۔

شکل ع۲ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۲) کو پورا کرتے ہیں لیکن شرط (۱) کو پورا نہیں کرتے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع بھی متشابہ نہیں ہیں۔

اس امر کی ایک اور سادہ مثال ذیل میں درج ہے۔

ایک مربع اور مستطیل متساوی الزوایا ہیں لیکن اُن کے نظیر کے اضلاع متناسب نہیں ہیں۔ اس لیے یہ دو اشکال متشابہ نہیں ہیں۔ نیز ایک مربع اور معین کے ضلعے متناسب ہیں لیکن اشکال متساوی الزوایا نہیں ہیں اس لیے یہ بھی متشابہ نہیں ہیں۔

امثلہ ۳

(۱) مثلث اب ج میں لاما متوازی ہے ب ج کے اور اضلاع اب، اج سے نقاط لا، ما پر ملتا ہے۔

(ا) اگر اب = ۴ء۲″، ب ج = ۶ء۳″، الا = ۴ء۱″ تو لاما معلوم کرو۔
[جواب ۱ء۲″]

(ب) اگر ب ج = ۷ء۷ سمر، لاما = ۵ء۵ سمر، الا = ۵ء۴ سمر تو اب معلوم کرو۔
[جواب ۹ء۹ سمر]

(۲) مثلث اب ج میں اَ = ۲″، بَ = ۵ء۳″، جَ = ۵ء۴″ قاعدہ کے سروں میں سے خطوط ب د اور ج ع مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں اگر ع ن : ن ج = د ن : ن ب = ۲ : ۵ تو ع د، اع اور ج د کے طول معلوم کرو۔ [جواب ۸ء۳″، ۸ء۱″، ۴ء۱″]

(۳) ثابت کرو کہ مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا نصف ہے۔

(۴) ایک دائرہ کے دو وتر اب اور ج د ایک دوسرے کو نقطہ ط پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اط × ط ب = ج ط × ط د

(۵) ایک بیرونی نقطہ و سے دائرہ کا مماس و ت کھینچا گیا ہے اور و میں سے گزرنے والا کوئی قاطع دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ و ا × و ب = و ت۲۔

(۶) مثلث اب ج کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکز معمولی ترقیم کے مطابق سے، سے۱، سے۲، سے۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ

(ا) ج سے × ج سے۳ = اَ بَ

(ب) ا سے × سے سے۱ = ب سے × سے سے۲
= ج سے × سے سے۳

(۷) مثلث اب ج کا اندرونی مرکز سے ہے، سے میں سے ایک خط

کھینچا گیا ہے جو ب ج پر عمود ہے اور اب، اج سے بالترتیب د، ع پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ ب د × ج ع = ہ د²

(۸) مثلث اب ج کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود ا د،
ب ع، ج ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات اع ف، ب د ف، ج د ع میں سے
ہر ایک مثلث اب ج کے متشابہ ہے۔ اِس کی مدد سے مثلث د ع ف کے اضلاع
کے طول مثلث اب ج کے اضلاع اور زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو۔
[جواب ع ف = اَ جم ا]

(نوٹ۔ مثلث د ع ف کو مثلث اب ج کا مثلثِ پائین کہتے ہیں)۔

(۹) مثلث اب ج بناؤ جس میں اَ = ۹۰°، بَ : جَ = ۳ : ۴ اور
محیط = ۱۸ اسمر، ضلعوں کے طول محسوب کرو۔ [جواب اَ = ۵ء۷ سمر، بَ = ۵ء۴ سمر، جَ = ۰ء۶ سمر]

(۱۰) مثلث اب ج میں اَ قائمہ ہے اور ا د وتر ب ج پر عمود ہے،
ثابت کرو کہ مثلثات اب د، ج ا د، ج ب ا باہم متشابہ ہیں اور اس کی مدد سے
ثابت کرو کہ

(۱) اد² = ب د × د ج
(۲) اب² = ب د × ب ج
(۳) اج² = ج د × ج ب
(۴) اب² + اج² = ب ج²
(۵) ب د : د ج = اب² : اج²

(۱۱) مثلث اب ج میں ا د عمود ہے ب ج پر اور اع مثلث اب ج
کے حائطہ دائرہ کا قطر ہے، ثابت کرو کہ مثلثات اج د اور اع ب باہم متشابہ ہیں
اور اس سے اخذ کرو کہ اب × اج = اد × اع

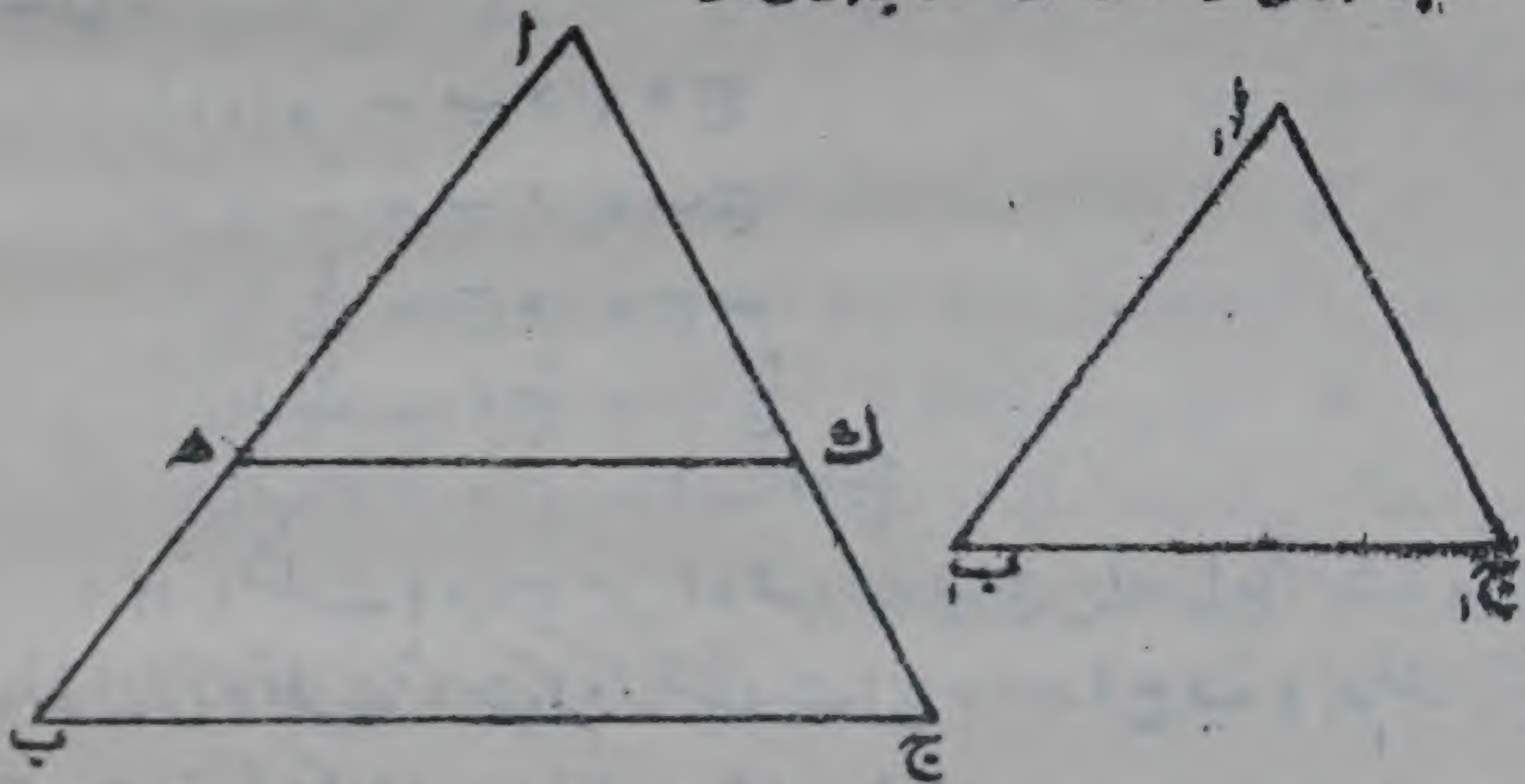
(۱۲) مثلث اب ج کے زاویہ ا کا اندرونی ناصف ضلع ب ج سے لا پر
اور مثلث اب ج کے حائطہ دائرہ سے ما پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات اج لا اور
اما ب باہم متشابہ ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ اب × اج = الا × اما

(۱۳) ایک شخص جس کا قد ۶ فٹ ہے ایک روشنی کے کھمبے سے ۲۴ فٹ کے

فاصلہ پر کھڑا ہے اور اُس کے سایہ کا طول ۸ فٹ ہے ۔ بتاؤ کہ روشنی زمین سے کتنی بلندی پر ہے ۔
[جواب ۳۱ فٹ]

(۱۴) ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے ۔ اُس نے نہر کے ایک کنارہ پر $۴\frac{۱}{۴}$ فٹ اونچی سلاخ نصب کی ۔ پھر وہ اس کنارہ سے عموداً ۲۰ فٹ پیچھے ہٹا تو سلاخ کی چوٹی اور مقابل کا کنارہ ایک سیدھ میں دکھائی دیے ۔ اگر اُس شخص کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو تو نہر کی چوڑائی معلوم کرو ۔ [جواب - ۶۰ فٹ]

(۱۵) دو انتصابی کھمبے ۱۵ فٹ اور ۱۲ فٹ اونچے ہیں ۔ ہر ایک کی چوٹی کو دوسرے کھمبے کے قدم سے رسیوں کے ذریعہ ملایا گیا ہے ۔ رسیوں کے نقطۂ تقاطع کی بلندی سطح زمین سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ بلندی کھمبوں کے درمیانی فاصلہ پر منحصر نہیں ہے ۔
[جواب $\frac{۲۰}{۳}$ فٹ]

۲۶ - مسئلہ - اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور اِن مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلثات متشابہ ہونگے ۔

مثلثات ا ب ج اور ا، ب، ج، میں $\hat{ا} = \hat{ا_1}$ اور

$\frac{اب}{ا_1ب_1} = \frac{اج}{ا_1ج_1}$ ثابت کرنا ہے کہ یہ مثلثات متشابہ ہیں ۔

اب پر نقطہ ھ ایسا لو کہ اھ = ا،ب، اور اج پر نقطۂ ک ایسا لو کہ

اک = ا ج۱ ۔

ھ ک کو ملاؤ ۔

مثلثات ا ھ ک ، ا ب۱ ج۱ میں

اٰ = اٰ

اھ = ا ب۱

اور اک = ا ج۱

∴ △ ا ھ ک = △ ا ب۱ ج۱

حسب مفروض (ا ب)/(ا ب۱) = (ا ج)/(ا ج۱)

اس لیے (ا ب)/(ا ھ) = (ا ج)/(اک) حسب عمل

اس لیے ھ ک متوازی ہے ب ج کے

اس لیے ا بٰ ج = ا ھٰ ک = ا ب۱ٰ ج۱

اور ا جٰ ب = ا کٰ ھ = ا ج۱ٰ ب۱

اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا ب۱ ج۱ متساوی الزوایا ہیں لہذا متشابہ ہیں ۔ یہی ثابت کرنا تھا ۔

امثلہ ۴

(۱) مثلث ا ب ج میں کوئی خط مستقیم قاعدہ کے متوازی ہے اور باقی اضلاع سے لا اور ما پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ا سے گزرنے والا وسطانیہ خط لا ما کی تنصیف کرتا ہے ۔

(۲) مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن کے حائط دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے اضلاع کی نسبت کے مساوی ہے ۔

(۳) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات میں نظیر کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات کے اندرونی دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کا قطر مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث ا ب ج مساوی الاضلاع ہے۔ ہر ضلع کا طول اَ ہے۔ ضلع ب ج کو دونوں جانب خارج کر کے اس پر دو نقطے ن اور ق ایسے لیے گئے ہیں کہ ب ن = ج ق = اَ اور ا ن اور ا ق کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱) ن ق : ن ا = ن ا : ن ب

(۲) ن ا^{۲} = ۳ اَ^{۲}

(۷) دو دائرے جن کے نصف قطر ر$_{۱}$ اور ر$_{۲}$ ہیں ایک دوسرے کو نقطہ ا پر خارجاً مس کرتے ہیں۔ اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس اُن کو ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف $\hat{ا}$ ق قائمہ ہے

اور ف ق^{۲} = ۴ ر$_{۱}$ ر$_{۲}$

(۸) دو دائرے ایک دوسرے کو ا پر خارجاً مس کرتے ہیں اور ان کا ایک مشترک مماس ف ق مرکزوں کے خط سے س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات س ا ف اور س ق ا متشابہ ہیں۔

(۲) س ا^{۲} = س ف × س ق

(۹) مثلثات ا ب ج اور ا$_{۱}$ ب$_{۱}$ ج$_{۱}$ میں $\frac{ا ب}{ا_{۱} ب_{۱}} = \frac{ا ج}{ا_{۱} ج_{۱}}$

اور $\hat{ب} = \hat{ب}_{۱}$ ، اگر $\hat{ج} \neq \hat{ج}_{۱}$ تو ثابت کرو کہ

$\hat{ج} + \hat{ج}_{۱}$ = دو قائمہ زاویے۔

چونکہ جˆ ≠ جˆ۱ اس لیے اˆ ≠ اˆ۱

اب ا میں سے ایک خط ا ج۲ ایسا کھینچو کہ ب اˆ ج۲ = ب۱ اˆ۱ ج۱

فرض کرو کہ ا ج۲، ب ج سے ج۲ پر ملتا ہے۔

اب مثلثات ا ب ج۲ اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں۔

اس لیے (ا ب) / (ا۱ ب۱) = (ا ج۲) / (ا۱ ج۱)

لیکن دیا گیا ہے کہ (ا ب) / (ا۱ ب۱) = (ا ج) / (ا۱ ج۱)

یعنی (ا ج۲) / (ا۱ ج۱) = (ا ج) / (ا۱ ج۱) یعنی ا ج۲ = ا ج

اس لیے ا جˆ ج۲ = ا جˆ۲ ج

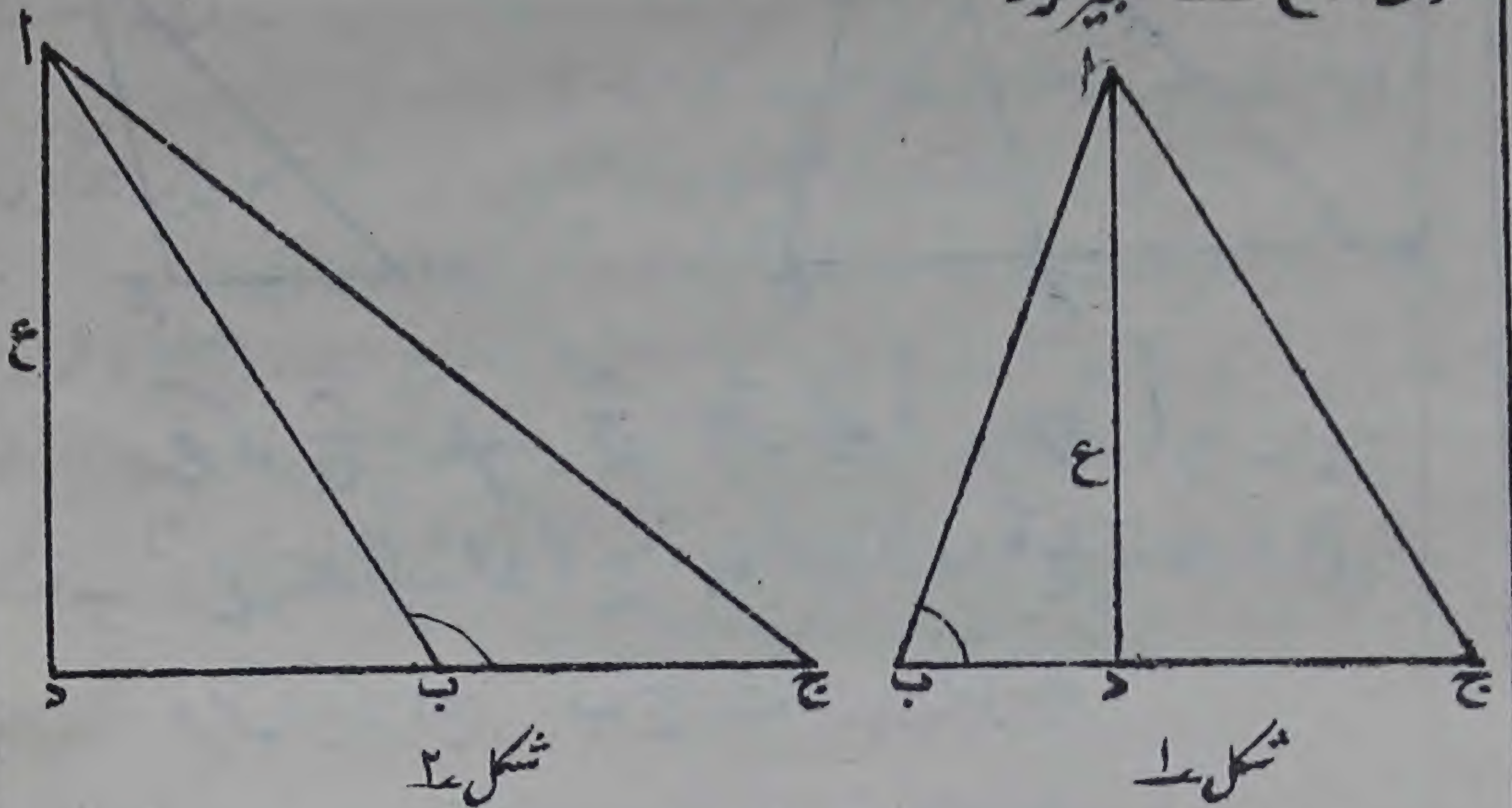
اس لیے ا جˆ ب + ا جˆ۲ ب = ۲ قائمہ زاویے۔

لیکن ا جˆ۲ ب = ا۱ جˆ۱ ب۱

اس لیے ا جˆ ب + ا۱ جˆ۱ ب۱ = ۲ قائمہ زاویے۔

۲۷۔ بعض ہندسی نتائج کو مثلثی نسبتوں کے استعمال سے

نہایت عمدہ طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) مثلث اب ج میں اد عمود ہے ب ج پر۔ اد کے طول کو ع سے تعبیر کرو

ا، ع، د، ب، ج
شکل ۲

ا، ع، ب، د، ج
شکل ۱

تب ع = جَ جب ا بۂ د

شکل ۱ میں ا بۂ د = بۂ اور شکل ۲ میں

ا بۂ د = ۱۸۰° - بۂ

اس لیے دونوں صورتوں میں جب ا بۂ د = جب ب

∴ ع = جَ جب ب

اسی طرح سے ع = بَ جب ج

$$\therefore \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}}$

$$\therefore \frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$$

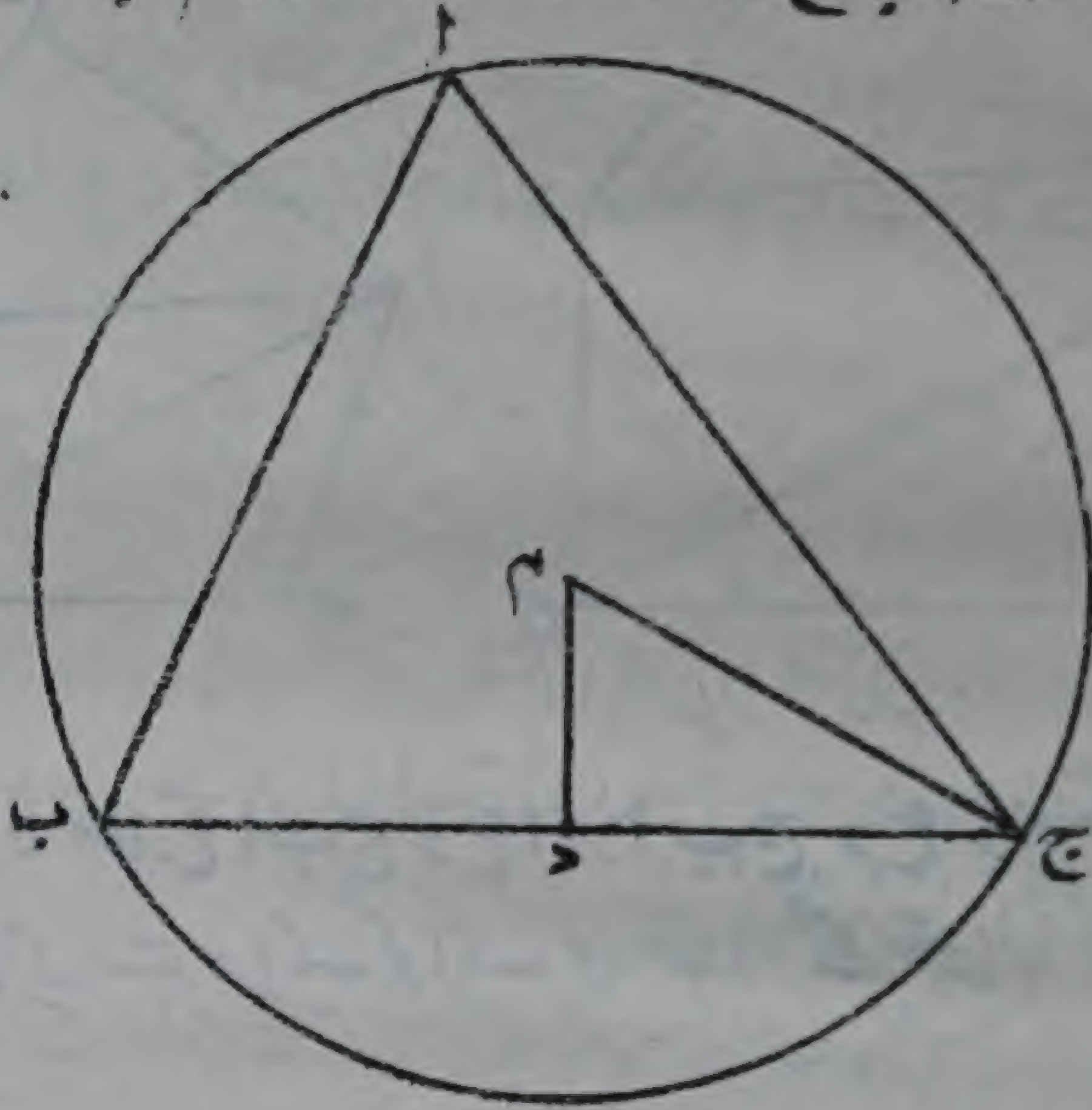
یعنی کسی مثلث کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیوب کے متناسب ہوتے ہیں۔

(۲) مثلث اب ج کا رقبہ $\Delta = \frac{۱}{۲}$ اَع　(دیکھو شکل بالا)

$= \frac{۱}{۲}$ اَ بَ جب ج

اسی طرح سے $\Delta = \frac{۱}{۲}$ بَ جَ جب ا $= \frac{۱}{۲}$ جَ اَ جب ب

پس حاصل ہوا کہ $\Delta = \frac{۱}{۲}$ اَ بَ جب ج $= \frac{۱}{۲}$ بَ جَ جب ا $= \frac{۱}{۲}$ جَ اَ جب ب

(۳) مثلث اب ج کے حائط دائرہ کا مرکز م ہے، نصف قطر م ج کو

س سے تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے تب م دْ ج قائمہ ہے
اور د مْ ج = اْ

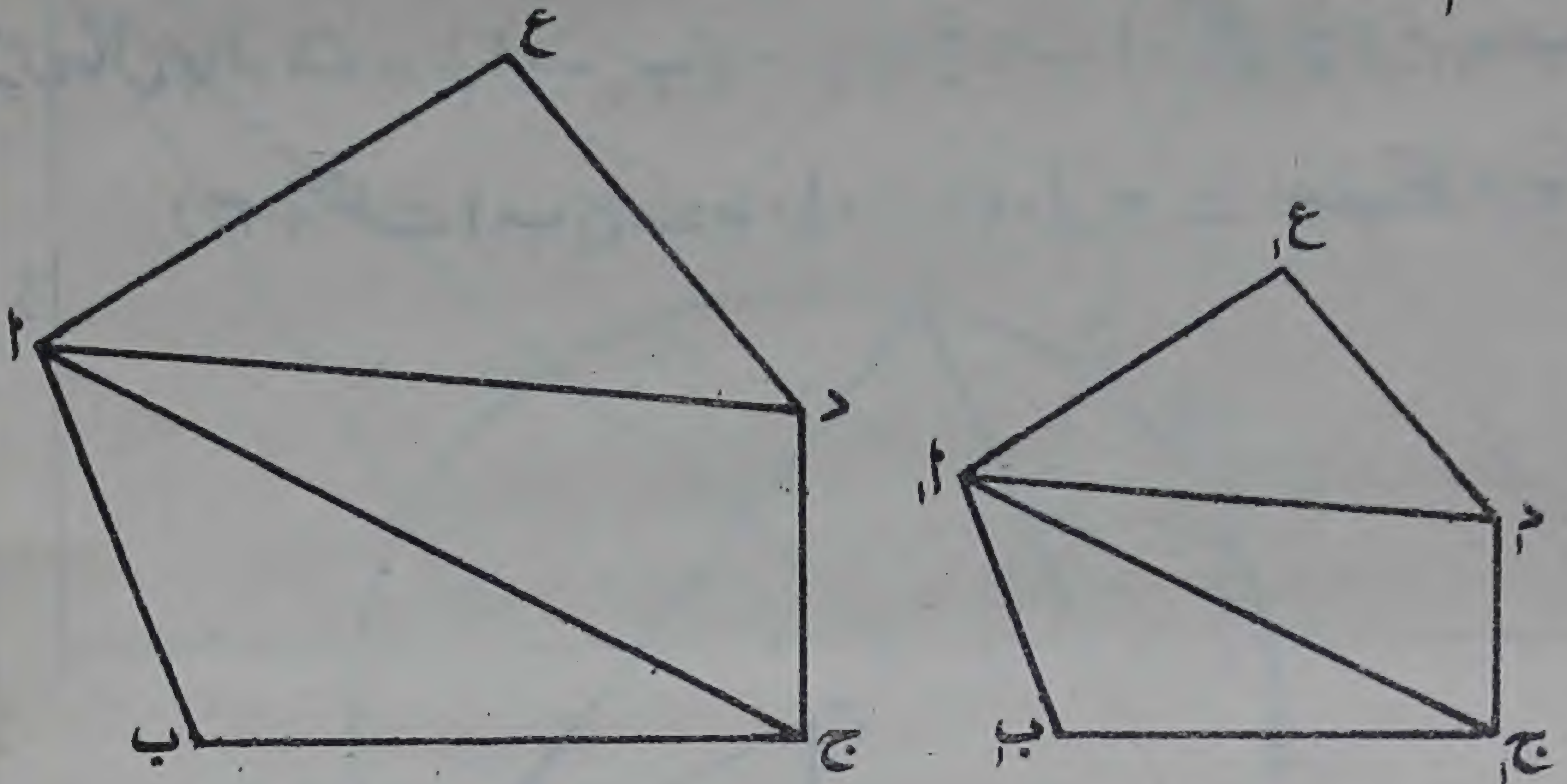
اس لیے $\frac{د ج}{م ج}$ = جب ا

یعنی $\frac{\frac{اَ}{۲}}{س}$ = جب ا

$\therefore$ س $= \frac{اَ}{۲ جب ا} = \frac{اَ بَ جَ}{۲ اَ بَ جَ جب ا} = \frac{اَ بَ جَ}{۴ \Delta}$

نوٹ: شکل بالا میں مثلث ا ب ج کے تمام زاویے حادہ لیے گئے ہیں۔

کسی ایک زاویہ کے منفرجہ یا قائمہ ہونے کی صورت میں طالب علم خود اس نتیجہ کو حاصل کرے۔

۲۸۔ مسئلہ۔ دو متشابہ کثیر الاضلاع متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں۔

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا, ب, ج, د, ع, باہم متشابہ ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ان میں سے ہر ایک کو ایک ہی تعداد کے متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

اج ' اد ' ا,ج, ' ا,د, کو ملاؤ۔

چونکہ کثیر الاضلاع متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{ا,ب,}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب, ج,}}$ اور $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب,}}$

اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا, ب, ج, متشابہ ہیں۔

اس لیے $\text{ب}\,\hat{\text{ج}}\,\text{ا} = \text{ب,}\,\hat{\text{ج,}}\,\text{ا,}$

اور $\frac{\text{ج ا}}{\text{ج, ا,}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب, ج,}}$

$= \frac{\text{ج د}}{\text{ج, د,}}$ (کیونکہ کثیر الاضلاع متشابہ ہیں)

نیز چونکہ ب ج̂ د = ب۱ ج̂۱ د۱

اس لیے ا ج̂ د = ا۱ ج̂۱ د۱

اب مثلثات ا ج د اور ا۱ ج۱ د۱ میں

ا ج̂ د = ا۱ ج̂۱ د۱

اور (ا ج) / (ا۱ ج۱) = (ج د) / (ج۱ د۱)

اس لیے مثلثات ا ج د اور ا۱ ج۱ د۱ باہم متشابہ ہیں۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مثلثات ا د ع اور ا۱ د۱ ع۱ بھی متشابہ ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ متشابہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا۱ ب۱ ج۱ د۱ ع۱ کو ایک ہی تعداد کے متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

نوٹ (۱)۔ اوپر کی شکل میں کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد پانچ ہے اُس صورت میں جب کہ کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد پانچ سے زیادہ ہو اسی قسم کے استدلال سے مسئلہ بالا ثابت ہو سکتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اس ثبوت میں ضمنی طور پر یہ بھی ثابت ہو گیا ہے کہ

(ب ج) / (ب۱ ج۱) = (ا ج) / (ا۱ ج۱) = (ا د) / (ا۱ د۱)

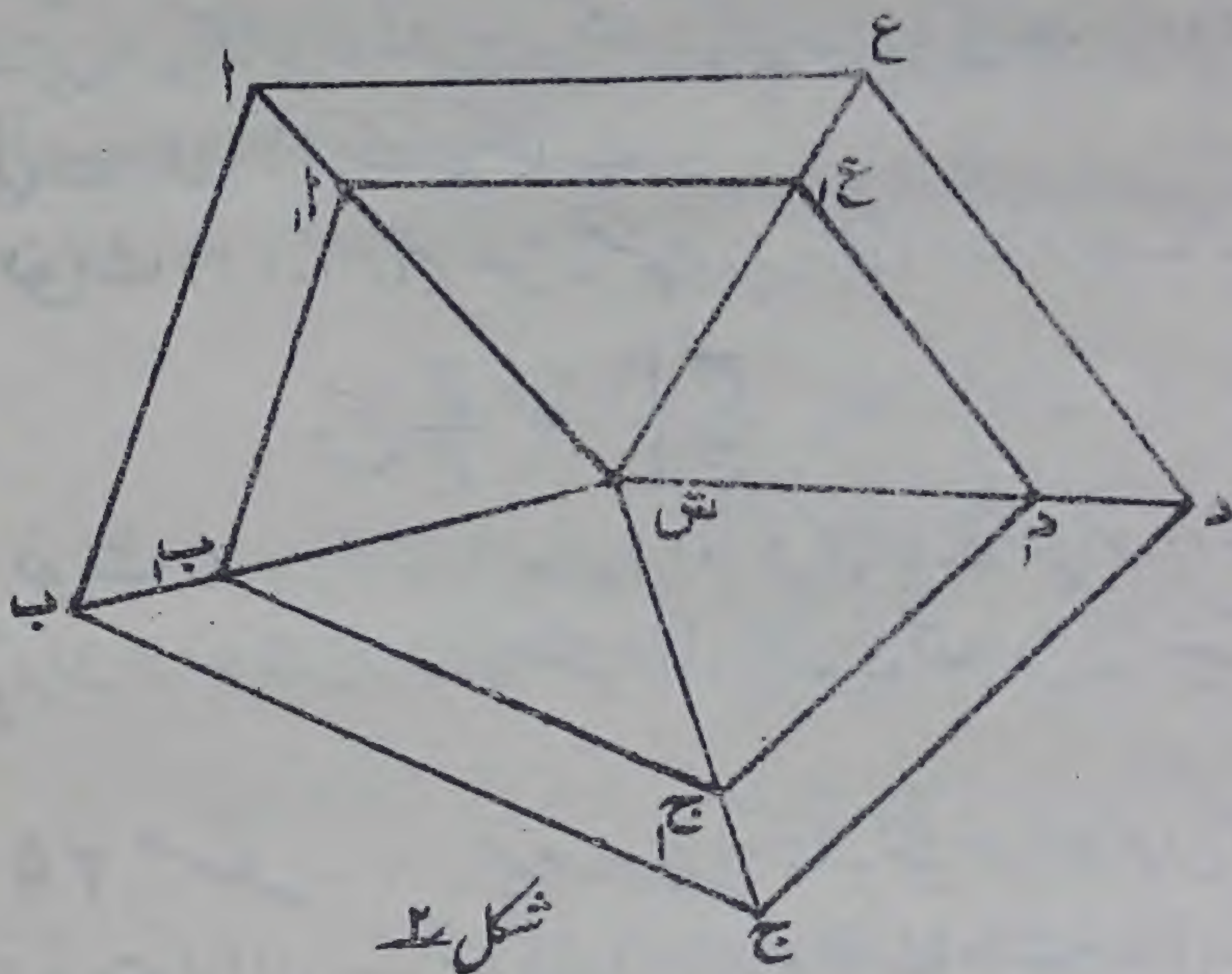
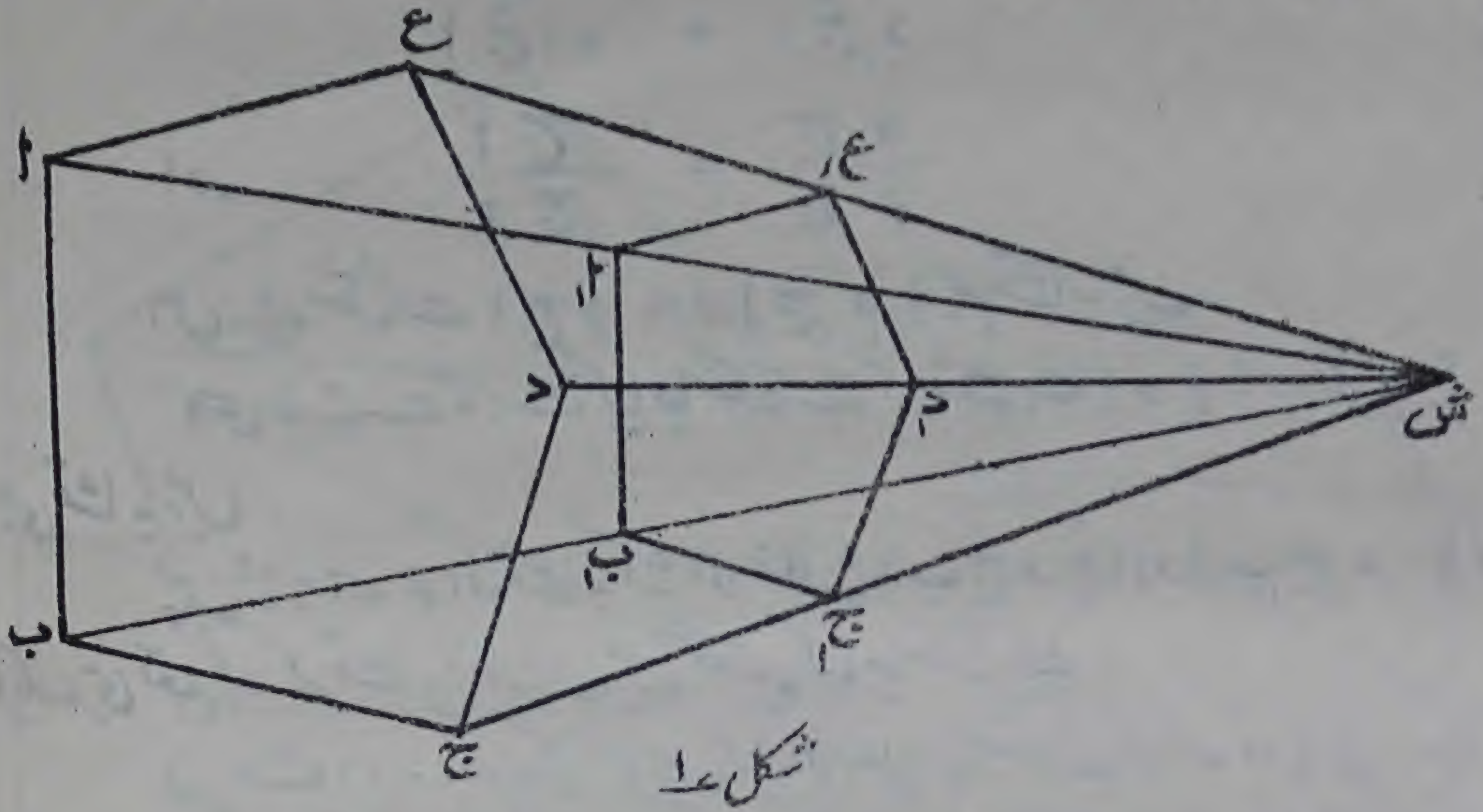
نوٹ (۳)۔ متناظر راسوں ا اور ا۱ کی بجائے کسی اور دو متناظر راسوں سے خطوط کھینچ کر کثیر الاضلاعوں کو متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

۲۹۔ مسئلہ۔ دو (غیر مساوی) متشابہ کثیر الاضلاعوں کو اس طرح رکھا جاسکتا ہے کہ اُن کے متناظر راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں۔

دو غیر مساوی متشابہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا۱ ب۱ ج۱ د۱ ع۱ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ نظیر کے ضلعے ا ب، ا۱ ب۱ ایک دوسرے کے

متوازی ہیں۔ (ظاہر ہے کہ نظیر کے ضلعوں کے دوسرے جوڑے بھی متوازی ہونگے)۔ ثابت کرنا ہے کہ خطوط ا ا، ب ب، ج ج، د د، ع ع، ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

شکل ۱

شکل ۲

فرض کرو کہ ا ا، ب ب کا نقطہ تقاطع ش ہے، ش ج اور ش ج کو ملاؤ۔
مثلثات ش ا ب، ش ا ب متشابہ ہیں

$$\therefore \quad \frac{\text{ش ب}}{\text{ش ب}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ب}_1}$$

لیکن   اب / ا١ب١ = ب ج / ب١ج١

اب مثلثات ش ب ج اور ش ب١ ج١ میں

ش بؔ ج = ش بؔ١ ج١ (کیونکہ ب ج ∥ ب١ ج١)

اور   ش ب / ش ب١ = ب ج / ب١ ج١

اِس لیے مثلثات ش ب ج اور ش ب١ ج١ متشابہ ہیں۔

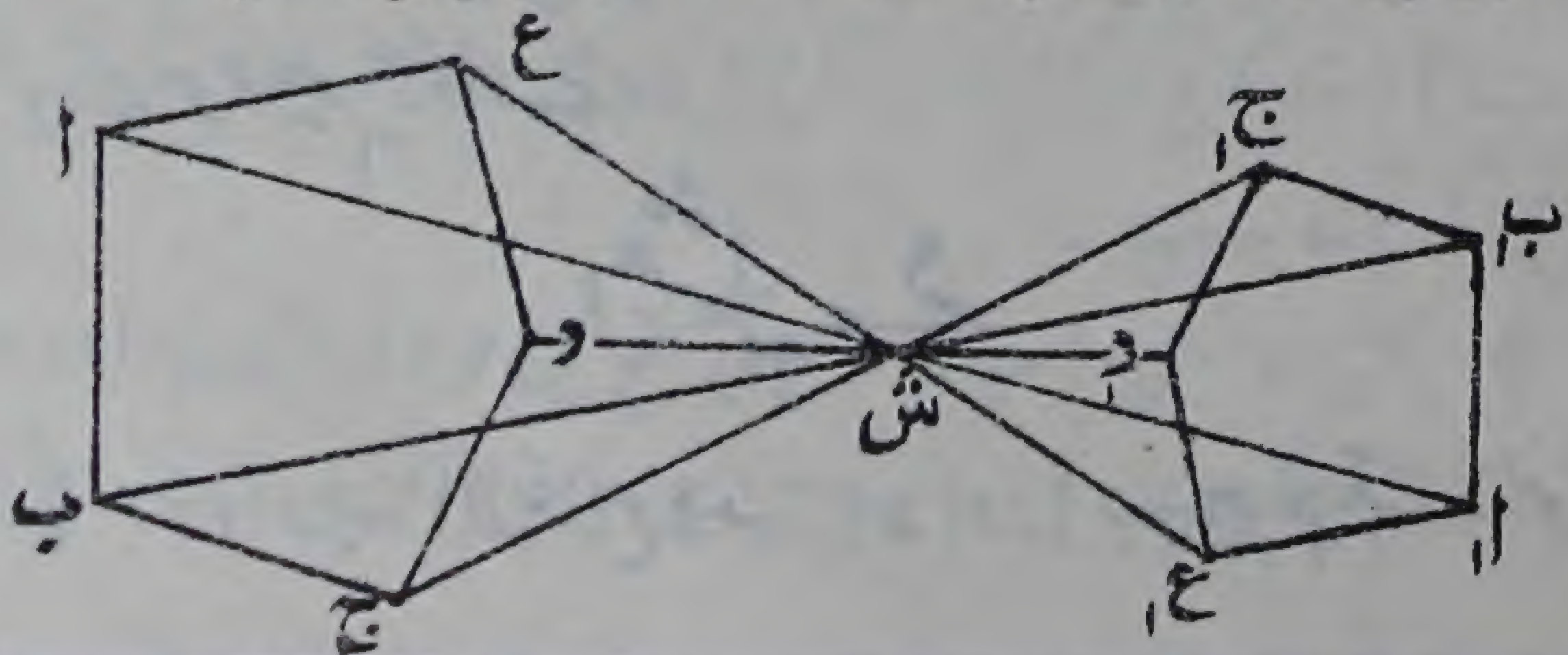
اِس لیے ب شؔ ج = ب١ شؔ ج١

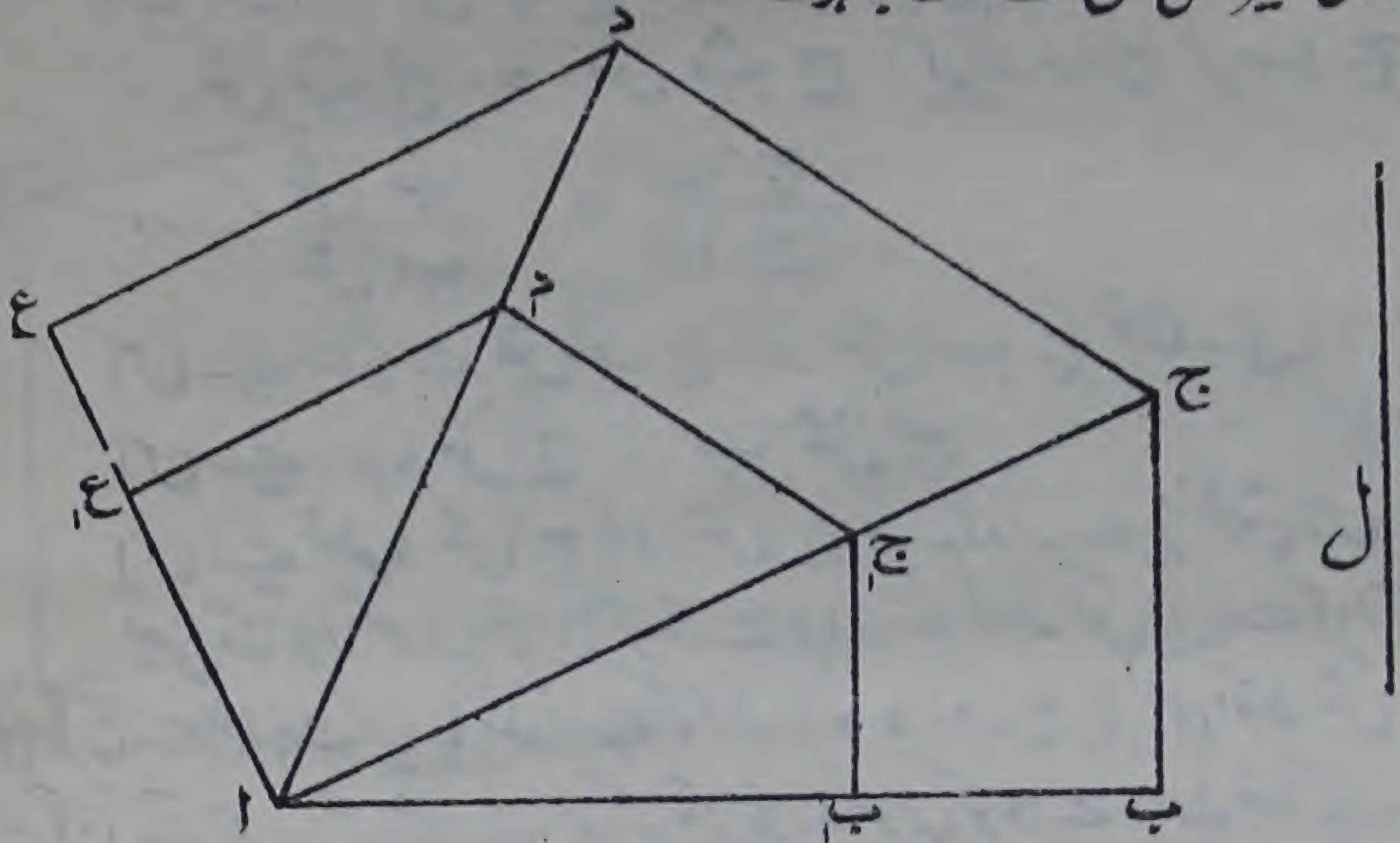
اِس لیے خطوط ش ج اور ش ج١ ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔

یعنی متناظر راسوں ج ج١ کو ملانے والا خط نقطہ ش میں سے گزرتا ہے
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ خطوط د د١ اور ع ع١ بھی نقطہ ش میں سے گزرتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ اگر دو متشابہ کثیر الاضلاع اس طرح رکھے جائیں کہ نظیر کے ضلعے متوازی ہوں تو یہ ہم وضع شکلیں کہلاتی ہیں اور اِن کے نظیر کے نقطوں کو ملانے والے خطوط کا نقطۂ تراکز ش اِن ہم وضع متشابہ اشکال کا مشابہت کا مرکز کہلاتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اگر متشابہ کثیر الاضلاعوں کو ہم وضع طور پر ایک دوسرے کے اندر رکھا جائے تو مشابہت کا مرکز دونوں شکلوں کے اندر ہوگا۔

نوٹ (۳)۔ دفعۂ ہذا کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے جو شکلیں کھینچی گئی ہیں ان میں نظیر کے اضلاع اب، ا١ب١ ایک ہی سمت میں متوازی رکھے گئے ہیں۔ اگر نظیر کے اضلاع اب، ا١ب١ کو مخالف سمتوں میں متوازی رکھا جائے تو متعلقہ شکل حسب ذیل ہوگی۔

اس صورت میں نظیر کے راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرینگے۔

۳۰۔ مسئلۂ عملی ۔ ایک دیے ہوئے ضلع پر ایک کثیر ضلعی شکل کھینچنا جو ایک دی ہوئی کثیر ضلعی شکل کے متشابہ ہو۔

فرض کرو کہ اب ج د ع ایک دی ہوئی شکل ہے اور ل دیے ہوئے ضلع کا طول ہے ایک شکل بنانا ہے جو دی ہوئی شکل اب ج د ع کے متشابہ ہو اور جس میں اب کے نظیر کے ضلع کا طول ل ہو۔ اج، اد کو ملاؤ۔

اب (ممدودہ بشرطِ ضرورت) پر ایک نقطہ ب، ایسا لو کہ اب، = ل

ب،ج، متوازی کھینچو ب ج کے جو اج سے ج، پر ملے۔

اور ج،د، متوازی کھینچو ج د کے جو اد سے د، پر ملے۔

اور د،ع، متوازی کھینچو د ع کے جو اع سے ع، پر ملے۔

تب اب،ج،د،ع، مطلوبہ شکل ہوگی۔

ثبوت متشابہ مثلثوں کی مدد سے بآسانی دیا جا سکتا ہے مشق کے طور پر طالبِ علم ثبوت خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۵

(۱) ذوار بعۃ الاضلاع اب ج د اور اب،ج،د، متشابہ ہونگے اگر

(۱) $\hat{ا} = \hat{ا_1}$ اور $\frac{اب}{ا_1ب_1} = \frac{بج}{ب_1ج_1} = \frac{جد}{ج_1د_1} = \frac{دا}{د_1ا_1}$

(۲) $\hat{ا} = \hat{ا_1}$ ، $\hat{ب} = \hat{ب_1}$ اور $\frac{اب}{ا_1ب_1} = \frac{بج}{ب_1ج_1} = \frac{اد}{ا_1د_1}$

(۲) ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د کے متشابہ ایک شکل بناؤ جس کے ہر ضلع کو اپنے نظیر کے ضلع کے ساتھ نسبت ۳ : ۴ ہو۔

(۳) ایک دیے ہوئے خط ا ب پر ایک نصف دائرہ بناؤ۔ اس نصف دائرہ کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو راس قوس پر ہوں اور دو قطر پر۔ اگر ا ب کا طول ۲ر ہو تو مربع کا ضلع معلوم کرو۔ (جواب $\frac{۲ر}{\sqrt{۵}}$)

(۴) ۴ء۲" نصف قطر کا ایک قطاع دائرہ بناؤ جس کا مرکزی زاویہ ۶۰° ہو۔ اس کے اندر ایک مربع بناؤ اور مربع کے ضلع کا طول ناپو اور حساب لگانے سے اپنے جواب کو جانچو۔ [جواب ۲ء۱ ($\sqrt{۶} - \sqrt{۲}$) انچ]

(۵) ایک منتظم مسدس ا ب ج د ع ف بناؤ جس کے ہر ضلع کا طول ۲ء۲" ہو اور اس کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو ضلعے ا ب، د ع کے متوازی ہوں اور اس کے راس باقی اضلاع پر ہوں۔

(۶) ایک دیے ہوئے مثلث کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک اور دیے ہوئے مثلث کے متشابہ ہو۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابہ ایک ایسا کثیر الاضلاع بناؤ جس کا محیط دیا گیا ہے۔

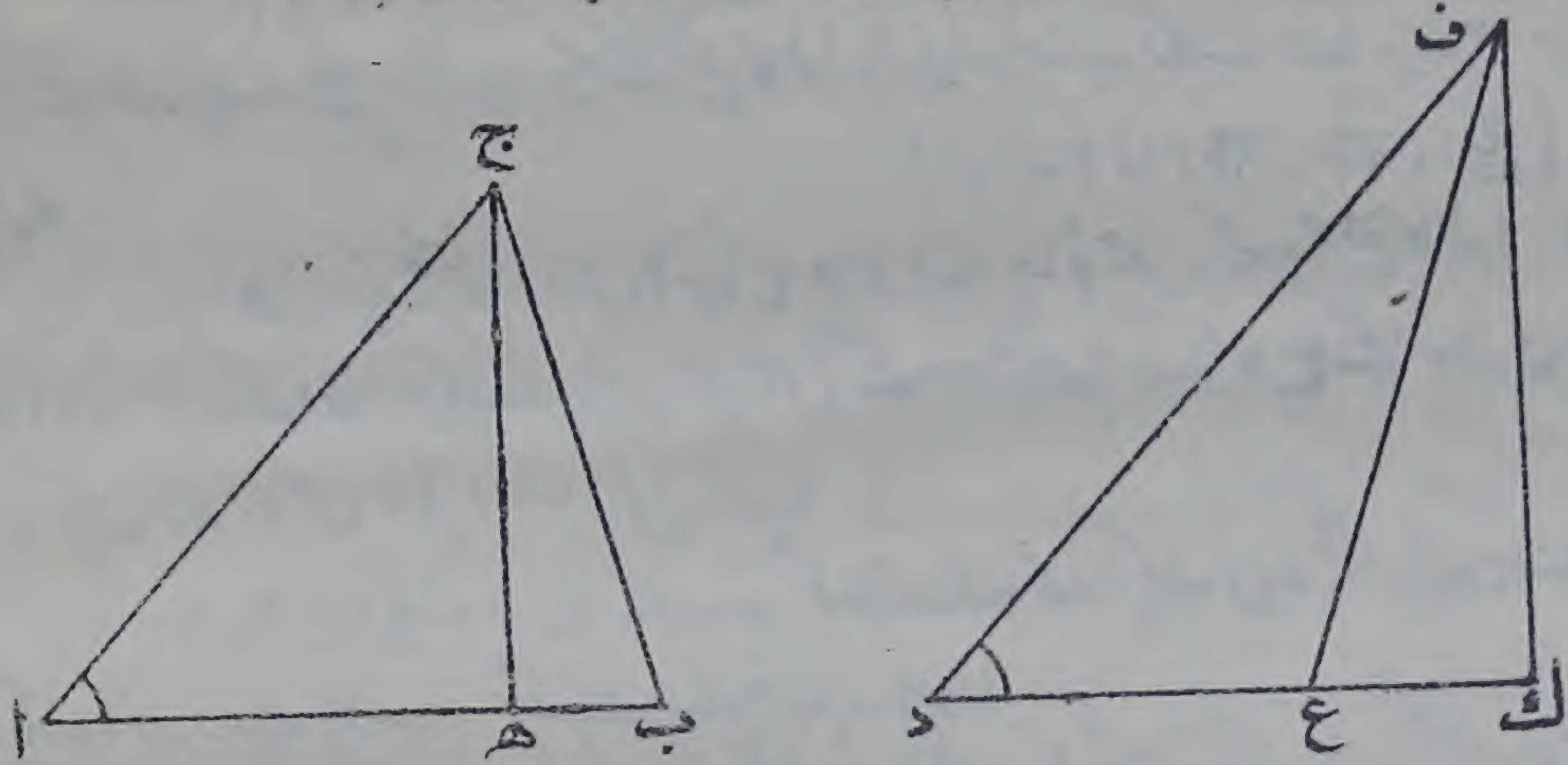
(۸) کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ و ہے۔ وا، وب، وج، ود، وع کو بالترتیب نقاط $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$، $د_1$، $ع_1$ پر ایک ہی معلومہ نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع $ا_1ب_1ج_1د_1ع_1$ دیے ہوئے کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کے متشابہ ہے۔

(۹) کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کی سطح میں و کوئی نقطہ ہے اور و ا یا و ا ممدودہ پر کوئی نقطہ $ا_1$ لیا گیا ہے۔ $ا_1ب_1$، $ب_1ج_1$، $ج_1د_1$، $د_1ع_1$ بالترتیب اب، بج، جد، دع کے

متوازی کھینچے گئے ہیں جو وب، وج، و د، وع سے بالترتیب ب، ج، د، ع، پر ملتے ہیں۔ اع کو ملا یا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کثیر الاضلاع اب ج د ع کے متشابہ ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی کوئی مستوی تراش جو قاعدہ کے متوازی ہو قاعدہ کے متشابہ ہوتی ہے۔

(۱۱) متشابہ مشترک المحیط شکلوں کے حائط دائروں کے قطر نظیر کے ضلعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

۳۱۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان مثلثوں کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔

مثلث اب ج کا زاویہ ا مثلث د ع ف کے زاویہ د کے مساوی ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ $\frac{\triangle \text{ اب ج}}{\triangle \text{ دع ف}} = \frac{\text{اب} \times \text{اج}}{\text{دع} \times \text{دف}}$

ج سے اب پر عمود ج ھ اور ف سے د ع پر عمود ف ك نکالو

مثلثات ج ا ھ، ف د ك متشابہ ہیں۔

اس لیے $\frac{\text{ج ھ}}{\text{ف ك}} = \frac{\text{اج}}{\text{دف}}$

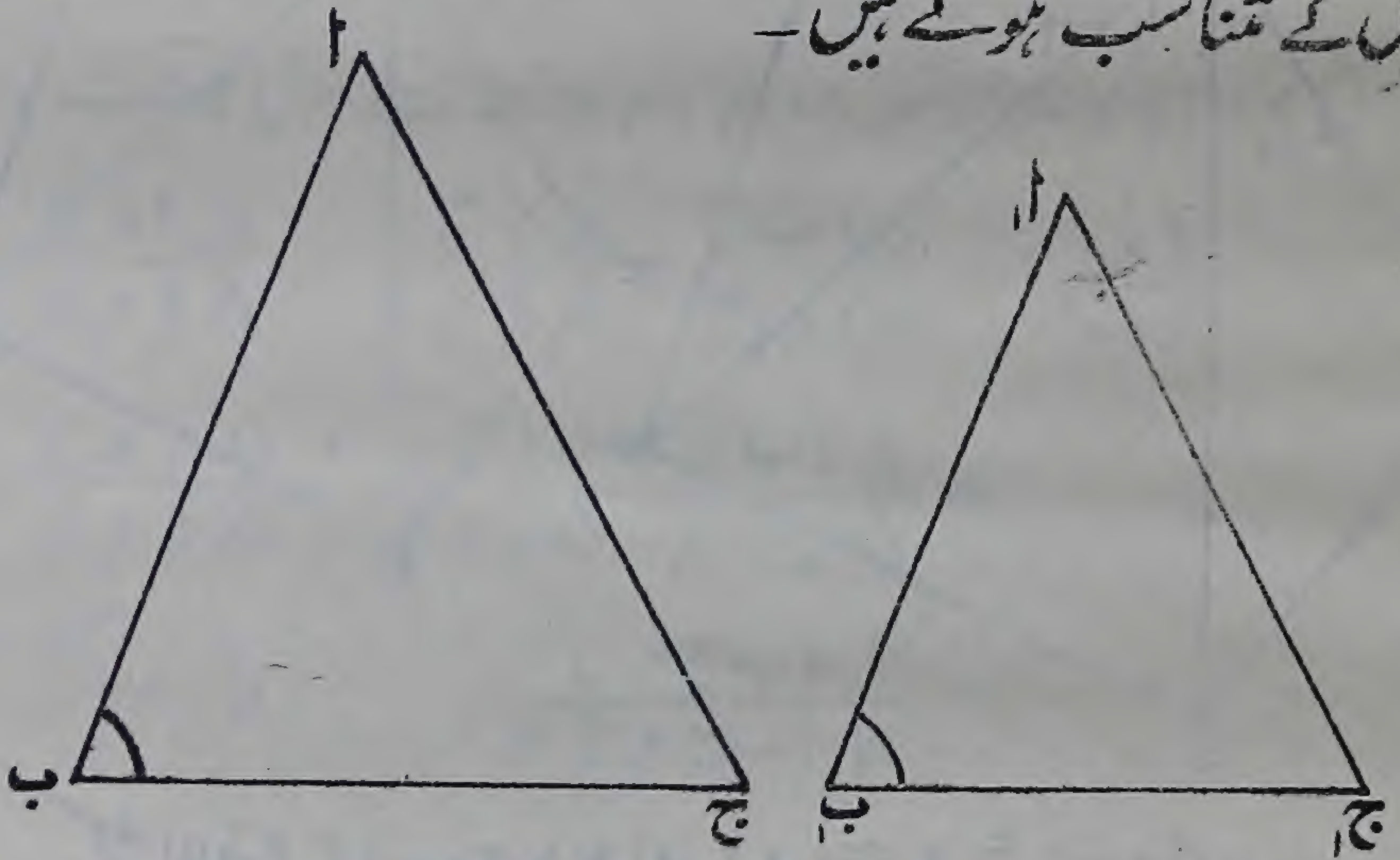
$$\triangle\,\text{ا ب ج} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا ب} \times \text{ج ھ}$$

اور $$\triangle\,\text{د ع ف} = \tfrac{1}{2}\,\text{د ع} \times \text{ف ك}$$

$$\therefore \frac{\triangle\,\text{ا ب ج}}{\triangle\,\text{د ع ف}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج ھ}}{\text{د ع} \times \text{ف ك}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ج}}{\text{د ع} \times \text{د ف}} \quad \left[\text{کیونکہ } \frac{\text{ج ھ}}{\text{ف ك}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{د ف}}\right]$$

نوٹ۔ اس مسئلہ کا متبادل ثبوت دفعہ ۲۷ مثال ۲ کے نتیجہ کی مدد سے حاصل کرو۔

نتیجہ صریح ۔ اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔

۳۲ مسئلہ۔ متشابہ مثلثوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں۔

ثابت کرنا ہے کہ $$\frac{\triangle\,\text{ا ب ج}}{\triangle\,\text{ا}_1\text{ب}_1\text{ج}_1} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ب}_1^2}$$

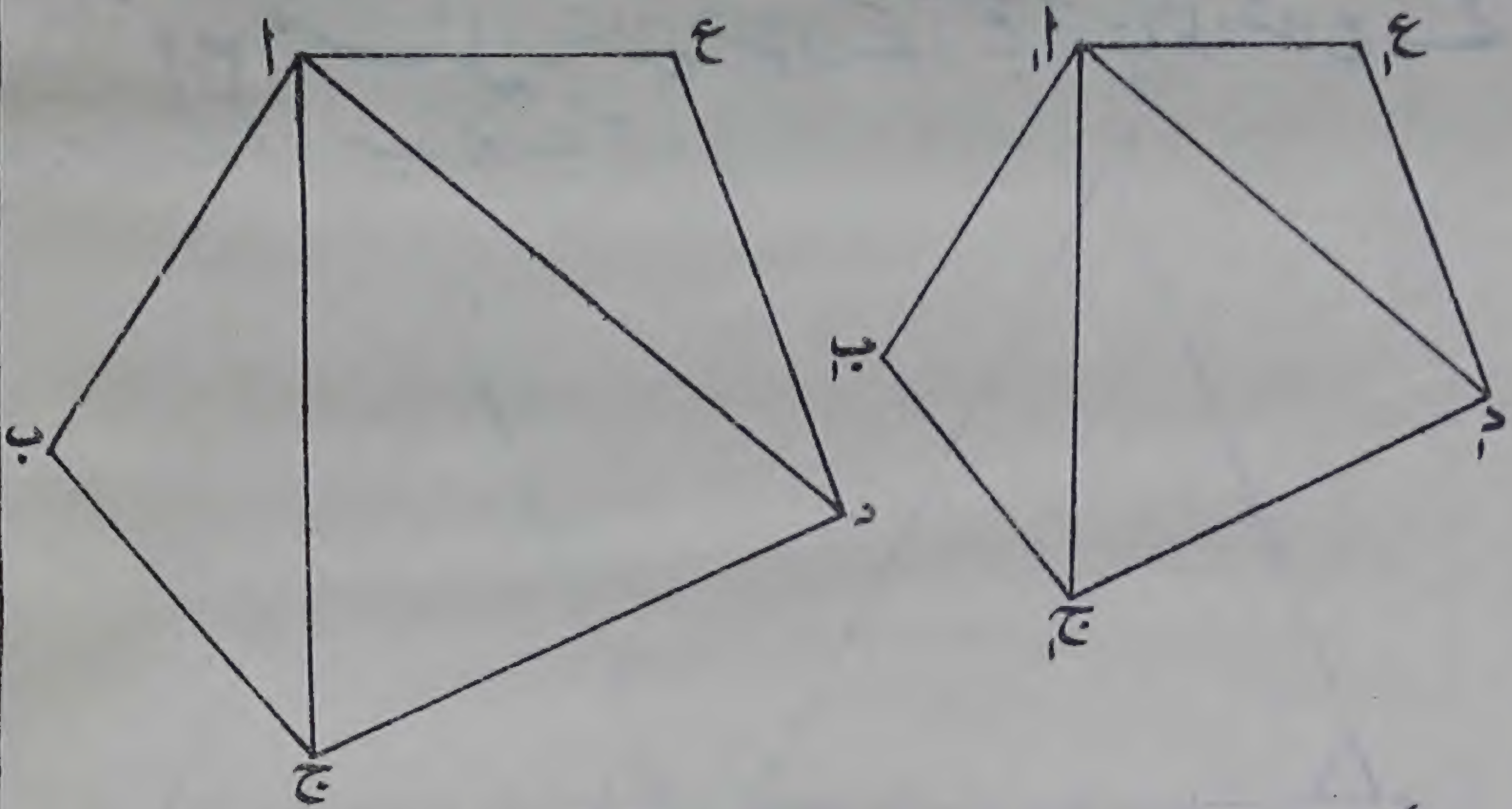
چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں اس لیے $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب}}_1$

اور $$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\text{ج}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ب}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اب $\frac{\triangle \text{ا ب ج}}{\triangle \text{ا' ب' ج'}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا' ب'} \times \text{ب' ج'}}$

$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ا' ب'}} \times \frac{\text{ا ب}}{\text{ا' ب'}}$ بموجب (۱)

$= \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا' ب'}^2}$ جو ثابت کرنا تھا۔

۳۳۔ مسئلہ۔ متشابہ کثیر الاضلاعوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا' ب' ج' د' ع' متشابہ ہیں

ثابت کرنا ہے کہ $\frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا' ب' ج' د' ع' کا رقبہ}} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا' ب'}^2}$

ا ج، ا د اور ا' ج'، ا' د' کو ملاؤ۔

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا' ب' ج' متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\triangle \text{ا ب ج}}{\triangle \text{ا' ب' ج'}} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا' ب'}^2}$ .... (۱)

نیز چونکہ مثلثات ا ج د اور ا' ج' د' متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\triangle \text{ا ج د}}{\triangle \text{ا، ج، د،}} = \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج، د،}^2}$ .... (۲)

نیز چونکہ مثلثات ا د ع اور ا، د، ع، متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\triangle \text{ا د ع}}{\triangle \text{ا، د، ع،}} = \frac{\text{د ع}^2}{\text{د، ع،}^2}$ .... (۳)

چونکہ کثیر الاضلاع اب ج د ع اور ا، ب، ج، د، ع، متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا، ب،}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج، د،}} = \frac{\text{د ع}}{\text{د، ع،}}$

اس لیے $\frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا، ب،}^2} = \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج، د،}^2} = \frac{\text{د ع}^2}{\text{د، ع،}^2}$ .... (۴)

نتائج (۱)، (۲)، (۳)، (۴) کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا، ب،}^2} = \frac{\triangle \text{ا ب ج}}{\triangle \text{ا، ب، ج،}} = \frac{\triangle \text{ا ج د}}{\triangle \text{ا، ج، د،}} = \frac{\triangle \text{ا د ع}}{\triangle \text{ا، د، ع،}}$$

$$= \frac{\triangle \text{ا ب ج} + \triangle \text{ا ج د} + \triangle \text{ا د ع}}{\triangle \text{ا، ب، ج،} + \triangle \text{ا، ج، د،} + \triangle \text{ا، د، ع،}}$$

$$= \frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا، ب، ج، د، ع، کا رقبہ}}$$ یہی ثابت کرنا تھا۔

امشلہ ۶

(۱) مثلث اب ج میں اضلاع اب، اج کے وسطی نقطے د اور ع ہیں۔ ثابت کرو کہ $\triangle$ ا د ع کا رقبہ منحرف د ب ج ع کے رقبہ کا $\frac{1}{3}$ ہے۔

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اُس کا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کا کونسا حصّہ ہے؟ (جواب $\frac{1}{4}$ حصّہ)

(۳) مثلث اب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لایا اس طرح

کھینچو کہ △ الاما کا رقبہ منحرف لا ب ما ج کے رقبہ کا ۹/۲ ہے -
[اشارہ - الا : اب = ۳ : ۴]

(۴) مثلث اب ج میں زاویہ ا قائمہ ہے اور اد عمود ہے ب ج پر - ثابت کرو کہ
△ ب ا د : △ ا ج د = اب^{۲} : اج^{۲}

(۵) متشابہ مشترک المحیط شکلوں کے رقبے اُن کے حائط دائروں کے قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں -

(۶) ایک دائرہ کے اندر بنے ہوئے منتظم مسدس کا رقبہ اس دائرہ کے گرد بنے ہوئے منتظم مسدس کے رقبہ کا ۳/۴ ہے -

(۷) منحرف اب ج د کے اضلاع اب، ج د باہم متوازی ہیں - اج اور ب د ایک دوسرے کو و پر قطع کرتے ہیں - اگر اب : ج د = ۲ : ۳ تو مثلثات و اب اور و ج د کے رقبوں کی نسبت معلوم کرو - (جواب ۴/۹)

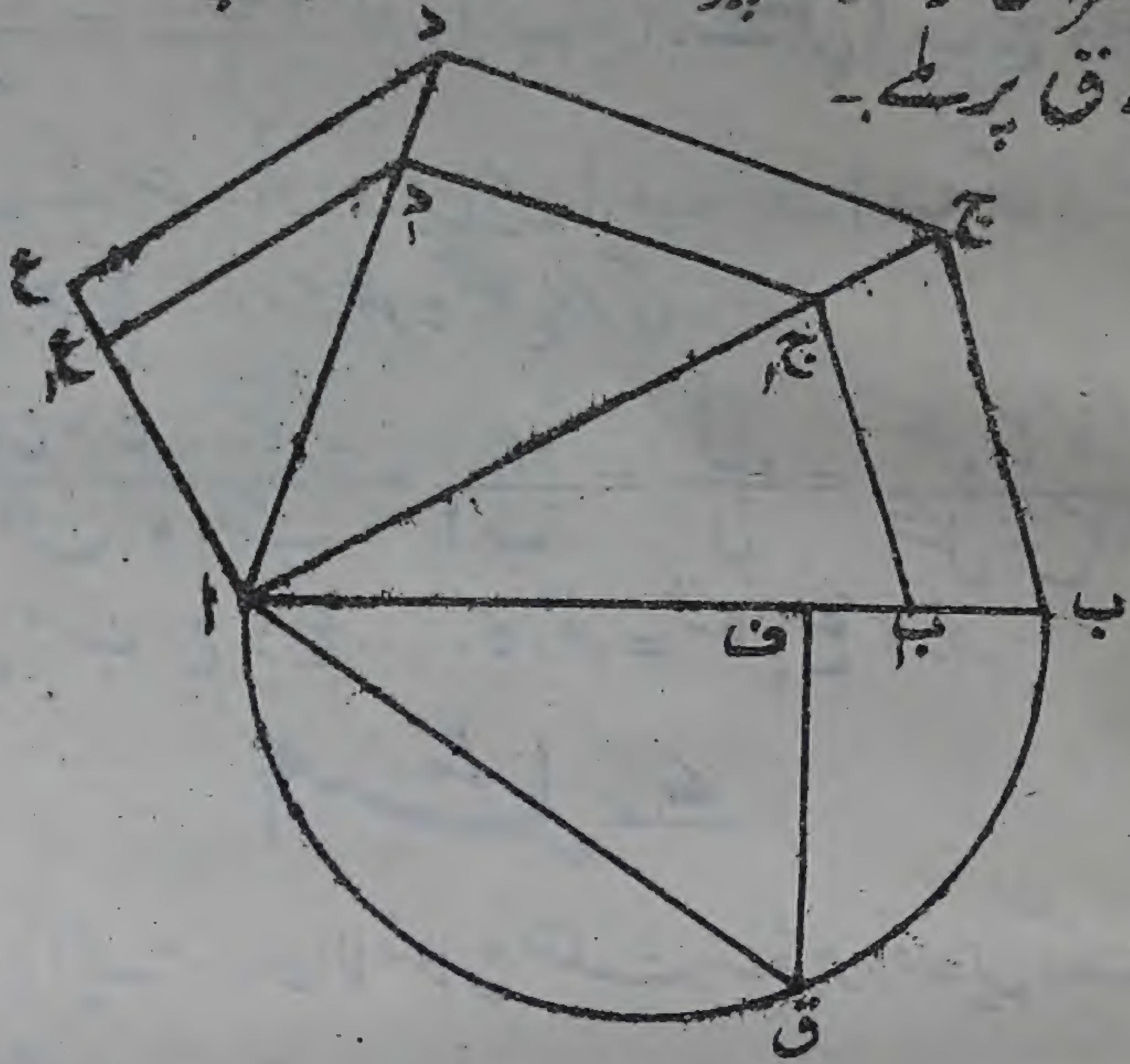
(۸) مثلث اب ج میں $\hat{ا}$ = ۶۰° اور ب ع اور ج ف، بالترتیب اضلاع اج، اب پر عمود ہیں - ثابت کرو کہ مثلث ا ع ف کا رقبہ مثلث اب ج کے رقبہ کا ۱/۴ ہے -

(۹) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہے جو
(۱) متناظر ارتفاعوں کے مربعوں میں ہے
(۲) متناظر وسطانیوں کے مربعوں میں ہے
(۳) اندرونی دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے
(۴) حائط دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے -

۴۳ مسئلہ عملی - ایک کثیر الاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابہ ہو اور جس کے رقبہ کو دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ ایک معلومہ نسبت م : ن ہو -

فرض کرو کہ دیا ہوا کثیر الاضلاع اب ج د ع ہے اب پر نقطہ ف ایسا معلوم کرو کہ

$$\frac{اف}{اب} = \frac{م}{ن}$$

اب کو قطر مان کر دائرہ کھینچو اور ف سے اب پر عمود ف ق کھینچو جو دائرہ سے ق پر ملے۔

اب پر نقطہ ب۱ ایسا معلوم کرو کہ اب۱ = اق

اب۱ پر ایک شکل اب۱ ج۱ د۱ ع۱ بناؤ جو دی ہوئی شکل اب ج د ع کے متشابہ ہو۔ تب شکل اب۱ ج۱ د۱ ع۱ مطلوبہ شکل ہوگی۔

کیونکہ $\frac{\text{شکل اب۱ ج۱ د۱ ع۱ کا رقبہ}}{\text{شکل اب ج د ع کا رقبہ}} = \frac{\text{اب۱}^2}{\text{اب}^2} = \frac{\text{اق}^2}{\text{اب}^2} = \frac{\text{اب} \times \text{اف}}{\text{اب}^2}$

$$= \frac{\text{اف}}{\text{اب}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

۳۵۔ مسئلہ عملی۔ ایک کثیر الاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع ش کے متشابہ ہو اور رقبہ میں ایک اور دیے ہوئے کثیر الاضلاع ع کے مساوی ہو۔

اشکال ش اور ع کو مربعوں میں تحویل کرو۔

فرض کرو کہ ان مربعوں کے ضلعوں کے طول بالترتیب ل اور ل۱ ہیں اگر شکل ش کا ایک ضلع اب ہو تو ایک خط اب۱ ایسا معلوم کرو کہ

$\frac{\text{ا ب}_1}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$ اور ا ب₁ پر ایک شکل ا ب₁ ج₁ د₁ ع₁ ....

بناؤ جو شکل ش کے متشابہ ہو اور جن میں ا ب₁ اور ا ب متناظر ضلعے ہوں تب ا ب₁ ج₁ د₁ ع₁ .... مطلوبہ شکل ہو گی

کیونکہ $\frac{\text{شکل ا ب}_1\text{ ج}_1\text{ د}_1\text{ ع}_1 \text{.... کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}} = \frac{\text{ا ب}_1^2}{\text{ا ب}^2} = \frac{\text{ل}_2^2}{\text{ل}_1^2} = \frac{\text{شکل ع کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}}$

اس لیے شکل ا ب₁ ج₁ د₁ ع₁ ... کا رقبہ = شکل ع کا رقبہ

امثلہ ۷

(۱) ایک مساوی الاضلاع مثلث بناؤ جو رقبہ میں ایک دیے ہوئے مثلث کے مساوی ہو۔

(۲) ایک مثلث مساوی الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ دو دیے ہوئے مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

(۳) ایک مثلث بناؤ جس کے اضلاع ۴ : ۵ : ۷ کے متناسب ہوں اور جس کا رقبہ ۵ مربع انچ ہو۔

(۴) ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د بناؤ جس میں ا ب = ۴ سمر، ب ج = ج د = ۵ سمر، د ا = ۳ سمر اور $\hat{\text{ا}}$ = ۹۰° اس کے متشابہ ایک ذوار بعۃ الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ ۲" ضلع پر کے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

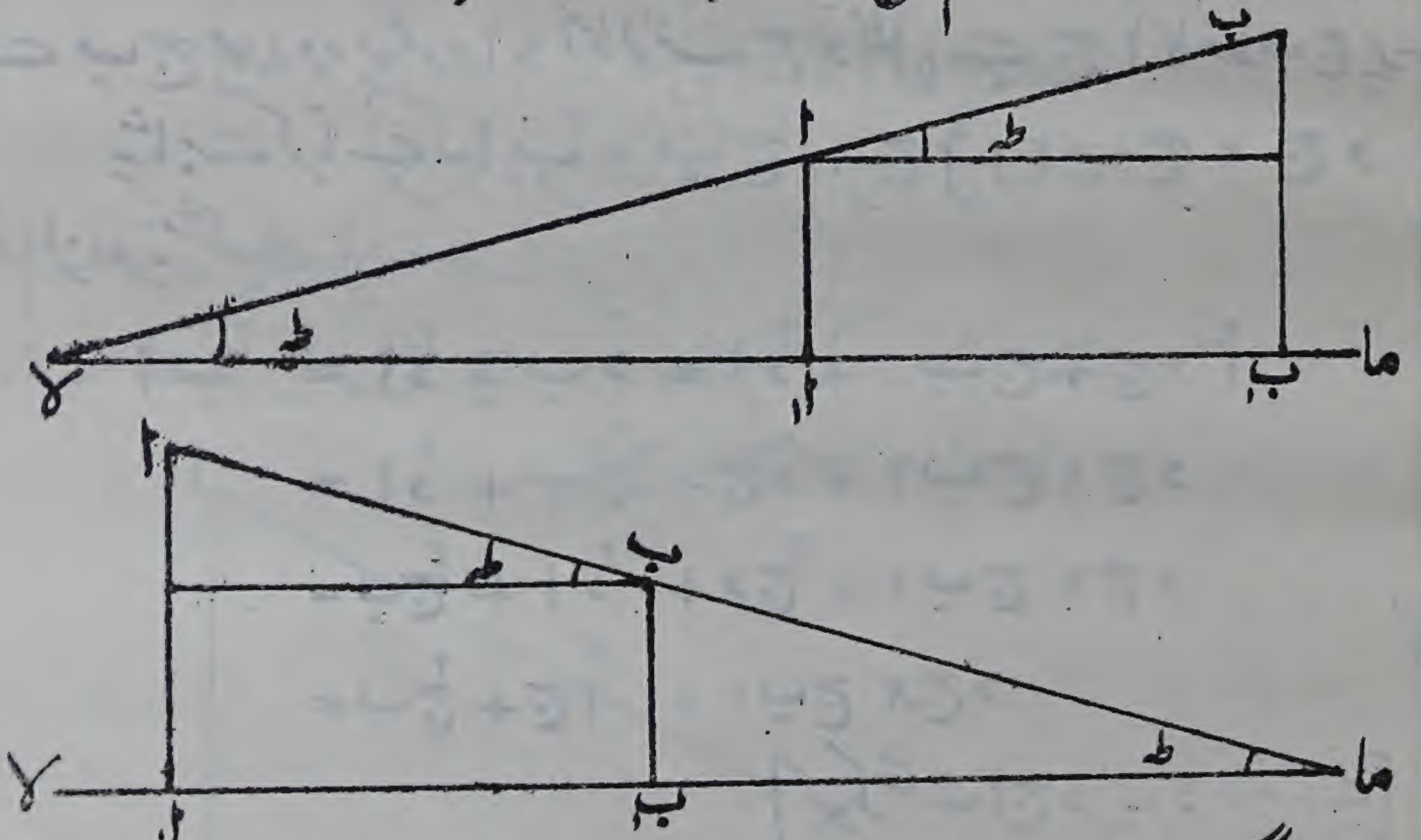
(۵) ایک شکل معیّن بناؤ جس کا ایک زاویہ ۹۰° کا ہو اور جس کا رقبہ ۲" ضلع پر بنے ہوئے منتظم مسدس کے رقبہ کے مساوی ہو۔

(۶) ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کا راسی زاویہ ۵۰° کا ہو اور جس کا رقبہ اُس مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو جس کے اضلاع ۲"، ۳"، ۵ء۳" ہیں۔

تیسرا باب

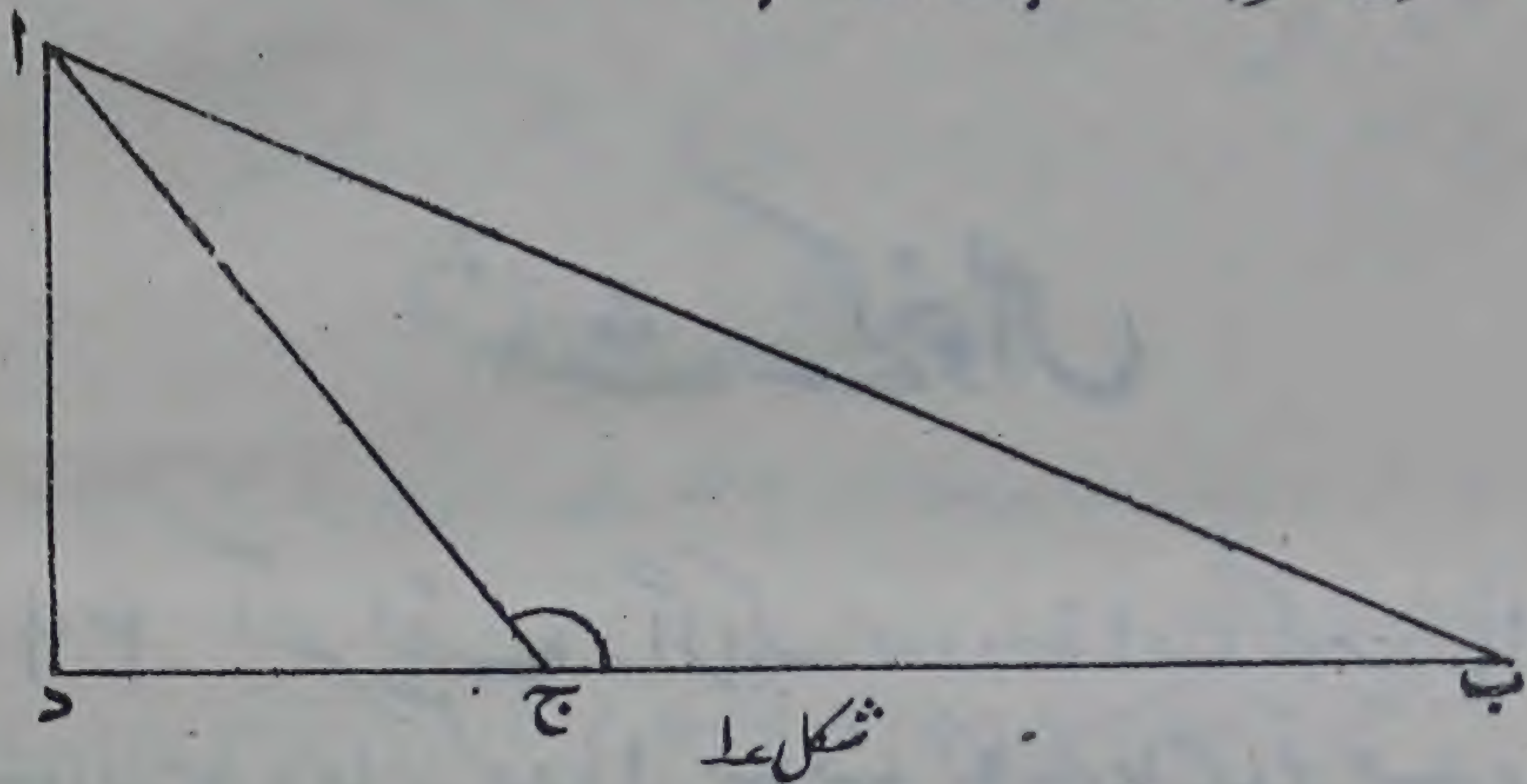
مثلث کے خواص

۳۶۔ تعریف۔ اگر ایک محدود خط ا ب کے سروں ا اور ب سے ایک اور خط لاما پر عمود اا، ب بَ نکالے جائیں تو محدود خط اَبَ خط ا ب کا قائم ظل کہلاتا ہے خط لاما پر۔

اگر ا ب اور لاما کا درمیانی حادہ زاویہ ط ہو تو اَبَ کا طول مساوی ہوگا ا ب × جم ط

۳۷۔ مسئلہ۔ (فیثاغورث کے مسئلہ کی توسیع)

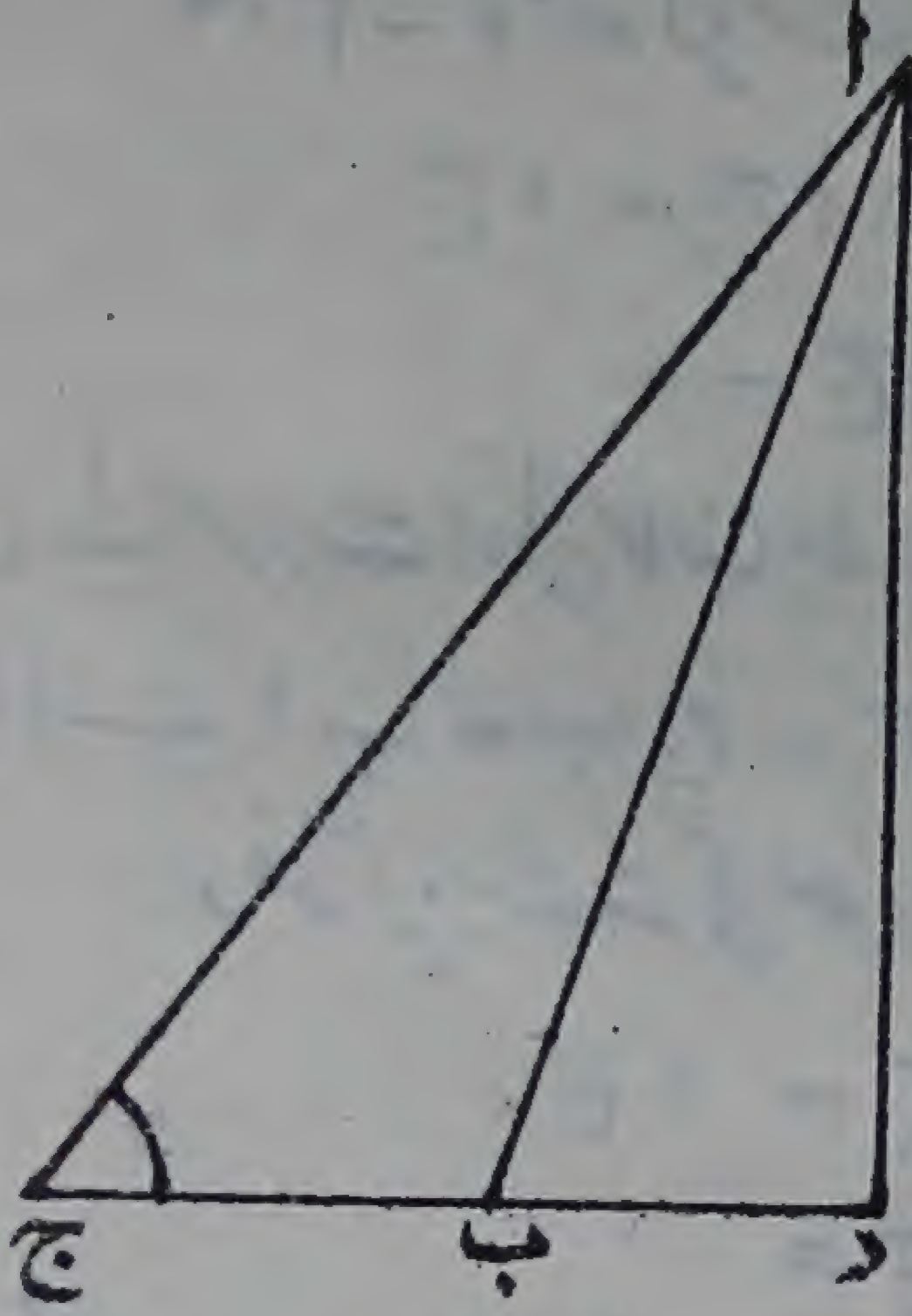
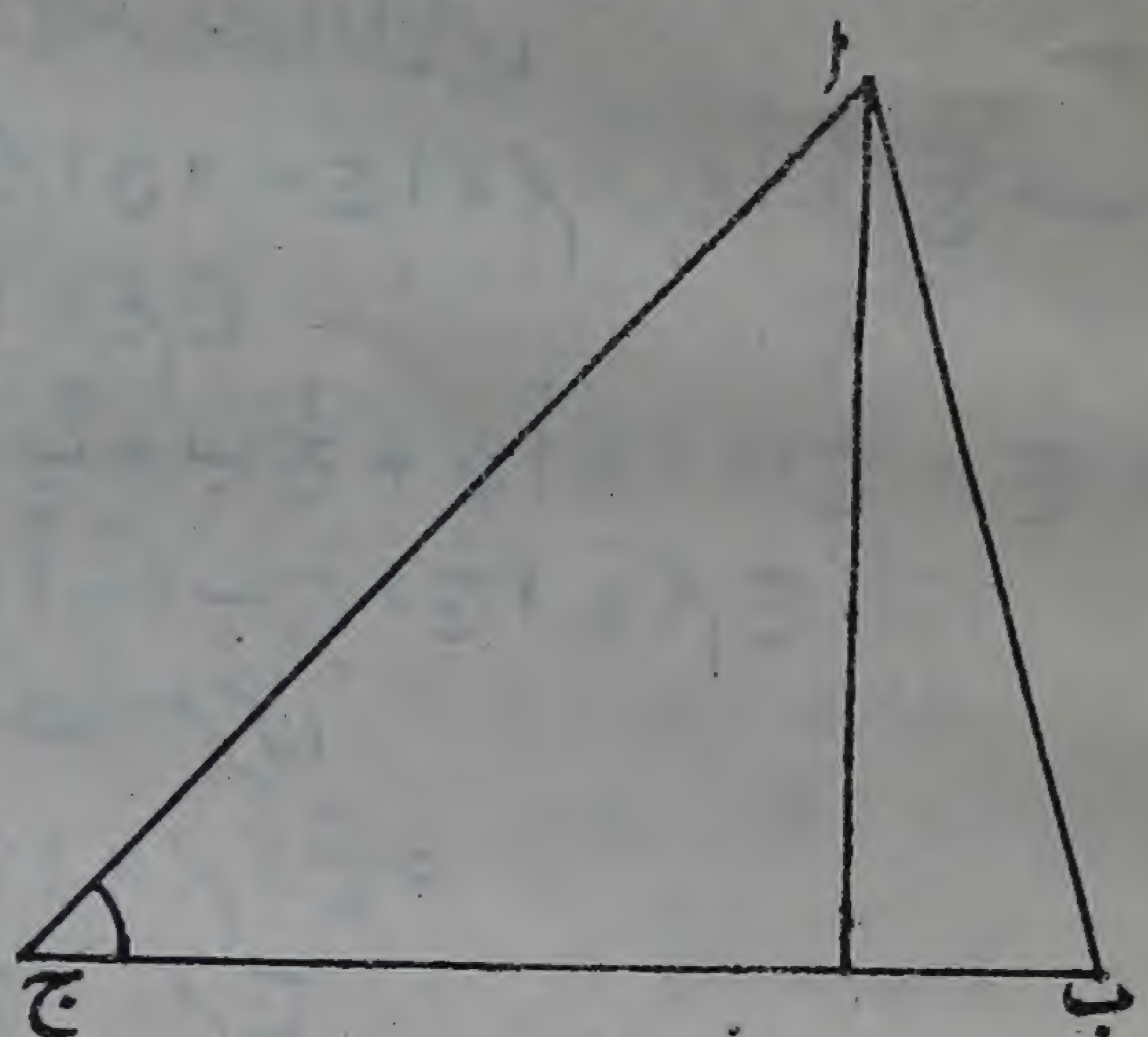
کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع بڑا ہوتا ہے، مساوی ہوتا ہے، چھوٹا ہوتا ہے باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بموجب اس کے کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہو، قائمہ ہو یا حادّہ ہو اور غیر مساوی ہونے کی صورت میں ان کا فرق دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس ضلع پر دوسرے ضلع کے ظل کے حاصلِ ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

ا د ج ب

شکل ۱۔۲

صورت اول۔ فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں ج̂ منفرجہ ہے۔
ا سے ب ج ممدودہ پر عمود ا د نکالو تب ج د ظل ہے ج ا کا خط ب ج پر۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 + ۲ ب ج × ج د
قائم الزاویہ مثلث ا ب د میں

ا ب^2 = ا د^2 + ب د^2 = ا د^2 + (ب ج + ج د)^2
= ا د^2 + ب ج^2 + ج د^2 + ۲ ب ج × ج د
= ب ج^2 + ا د^2 + د ج^2 + ۲ ب ج × ج د
= ب ج^2 + ج ا^2 + ۲ ب ج × ج د

[کیونکہ مثلث ا ج د میں د̂ قائمہ ہے]

صورت دوم۔ فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں ج̂ حادّہ ہے۔
ا سے ب ج پر عمود ا د نکالو
تب ج د ظل ہے ج ا کا خط ب ج پر

یہ ثابت کرنا ہے کہ اب^2 = بج^2 + جا^2 − ۲ بج × دج ۔

شکل ۳

شکل ۲

قائم الزاویہ مثلث اب د میں

اب^2 = اد^2 + دب^2 = اد^2 + (بج ــ دج)^2

= اد^2 + بج^2 + جد^2 − ۲ بج × دج

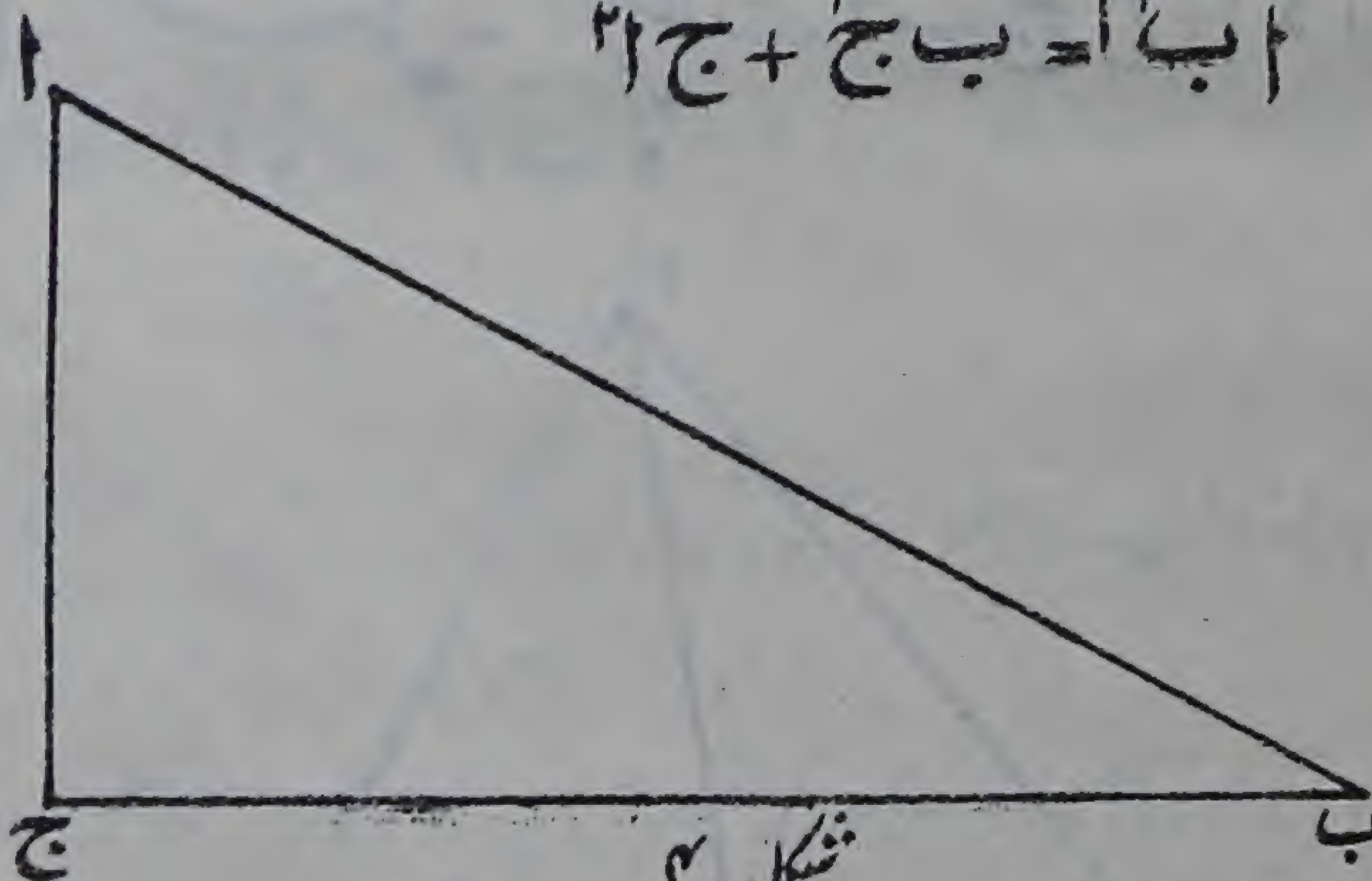
= بج^2 + اد^2 + جد^2 − ۲ بج × دج

= بج^2 + جا^2 − ۲ بج × دج

[کیونکہ مثلث اج د میں دؔ قائمہ ہے]

صورت سوم۔ اگر مثلث اب ج میں جؔ قائمہ ہو تو

اب^2 = بج^2 + جا^2

شکل ۴

یہ فیثاغورث کا مسئلہ ہے اور طالب علم اس کے ثبوت سے پہلے ہی سے

واقف ہے۔ ان تینوں صورتوں کو ملانے سے مسئلہ دفعہ ہذا ثابت ہوا۔

۳۸۔ دفعہ گزشتہ کی صورت اول میں

ج د = ج ا × جم ا ج د = ج ا × جم (۱۸۰ - ا ج$\hat{}$ ب)

= - ج ا × جم ج

اس لیے صورت اول کا ضابطہ ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 + ۲ ب ج × ج د

ہو جاتا ہے ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 - ۲ ب ج × ج ا × جم ج ..... (۱)

دفعہ گزشتہ کی صورت دوم میں

ج د = ج ا × جم ا ج$\hat{}$ د

= ج ا . جم ج

اس لیے صورت دوم کا ضابطہ ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 - ۲ ب ج × ج د

ہو جاتا ہے ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 - ۲ ب ج × ج ا × جم ج ...... (۲)

دفعہ گزشتہ کی صورت سوم میں ج$\hat{}$ قائمہ ہے اس لیے جم ج = ۰

اس لیے صورت سوم کا ضابطہ ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 ہو جاتا ہے

ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 - ۲ ب ج × ج ا × جم ج .... (۳)

ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) کو علم مثلث کی ترقیم کے مطابق
شکل جَ^{2} = اَ^{2} + بَ^{2} - ۲ اَ بَ جم ج میں لکھا جا سکتا ہے اور یہ ضابطہ
درست ہے خواہ ج حادہ ہو یا قائمہ یا منفرجہ

۳۹۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج میں ا د ایک وسطانیہ ہو تو

ا ب^2 + ا ج^2 = ۲ ا د^2 + ۲ ب د^2

مثلث اب د میں فرض کرو کہ ا $\hat{\text{د}}$ ب = ط

اس لیے ا $\hat{\text{د}}$ ج = ۱۸۰° ـ ط

تب اب^{۲} = اد^{۲} + ب د^{۲} ـ ۲ اد × ب د × جم ط ...... (۱)

نیز اج^{۲} = اد^{۲} + دج^{۲} ـ ۲ اد × دج × جم (۱۸۰° ـ ط)

= اد^{۲} + دج^{۲} + ۲ اد × دج جم ط

= اد^{۲} + ب د^{۲} + ۲ اد × ب د جم ط .... (۲)

(۱) اور (۲) سے

اب^{۲} + اج^{۲} = ۲ اد^{۲} + ۲ ب د^{۲}　　　جو ثابت کرنا تھا۔

امثلہ ۸

(۱) مثلث اب ج میں $\hat{\text{ج}}$ = ۶۰° تو ثابت کرو کہ ج^{۲} = ا^{۲} + ب^{۲} ـ اب

اور اگر $\hat{\text{ج}}$ = ۱۲۰° تو ثابت کرو کہ ج^{۲} = ا^{۲} + ب^{۲} + اب

(۲) مثلث اب ج میں ضلع ب ج پر کوئی نقطہ لا ہے۔ اگر راس ا نقطہ لا پر منطبق ہو جائے تو دفعہ ۳۷ کی مدد سے حاصل کرو کہ ب ج^{۲} = ب لا^{۲} + لا ج^{۲} + ۲ ب لا ۔ لا ج

(۳) مثلث اب ج میں ا = $\sqrt{۲۱}$ ، ب = ۴ اور ج = ۵

$\hat{\text{ا}}$ معلوم کرو　　　(جواب $\hat{\text{ا}}$ = ۶۰°)

(۴) ایک مثلث کے اضلاع ۷، ۸، ۹ سمر ہیں اس کے خطوطِ وسطی کے طول معلوم کرو۔

[جواب $\frac{\sqrt{۲۴۱}}{۲}$ ، ۷ ، $\frac{\sqrt{۱۴۵}}{۲}$ سمر]

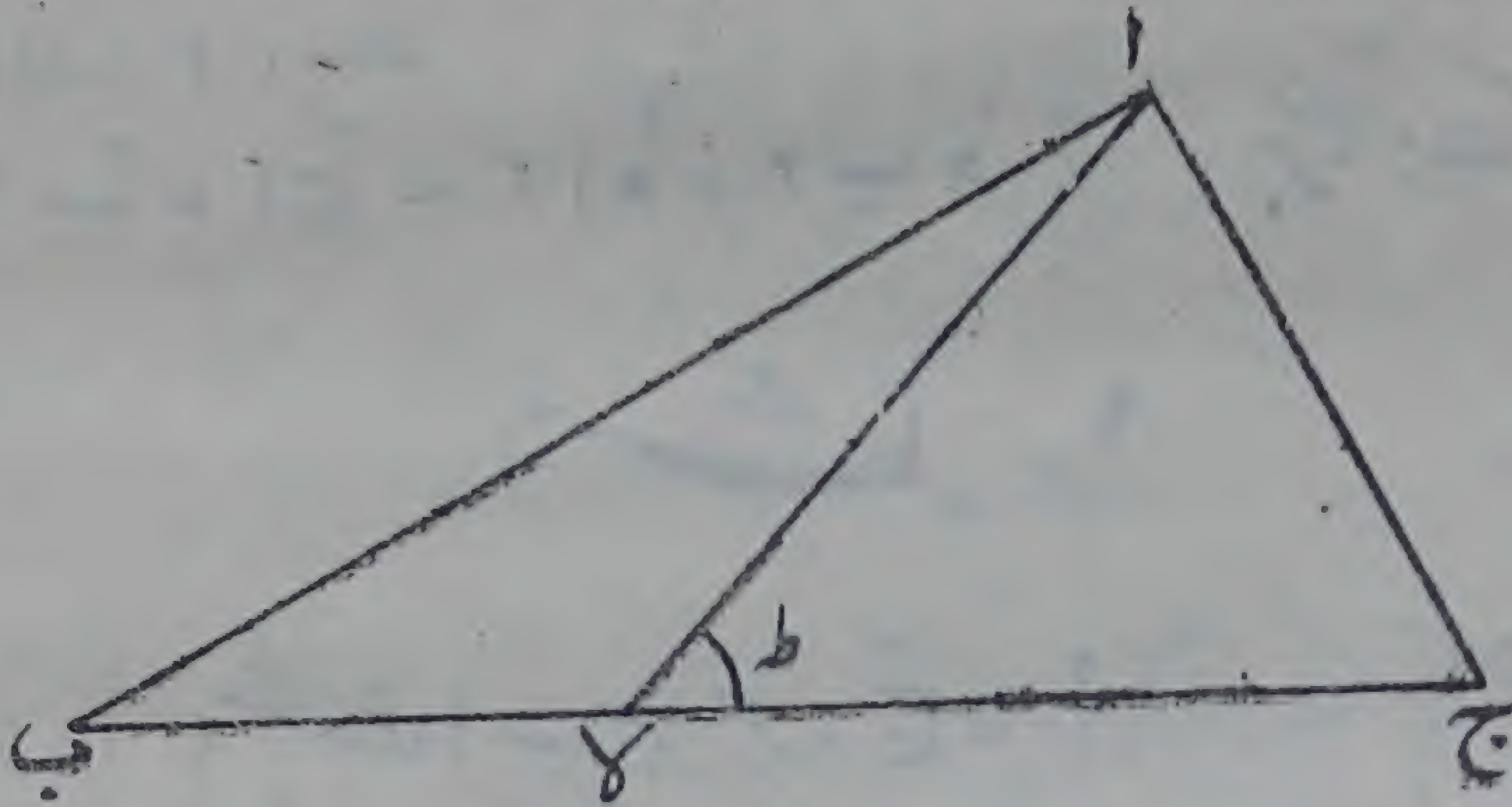
(۵) ایک مثلث کے خطوطِ وسطی کے طول ل، م، ن ہیں۔ اضلاع کے طول محسوب کرو۔

[جواب $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲م^{۲} + ۲ن^{۲} - ل^{۲}}$ ، ....]

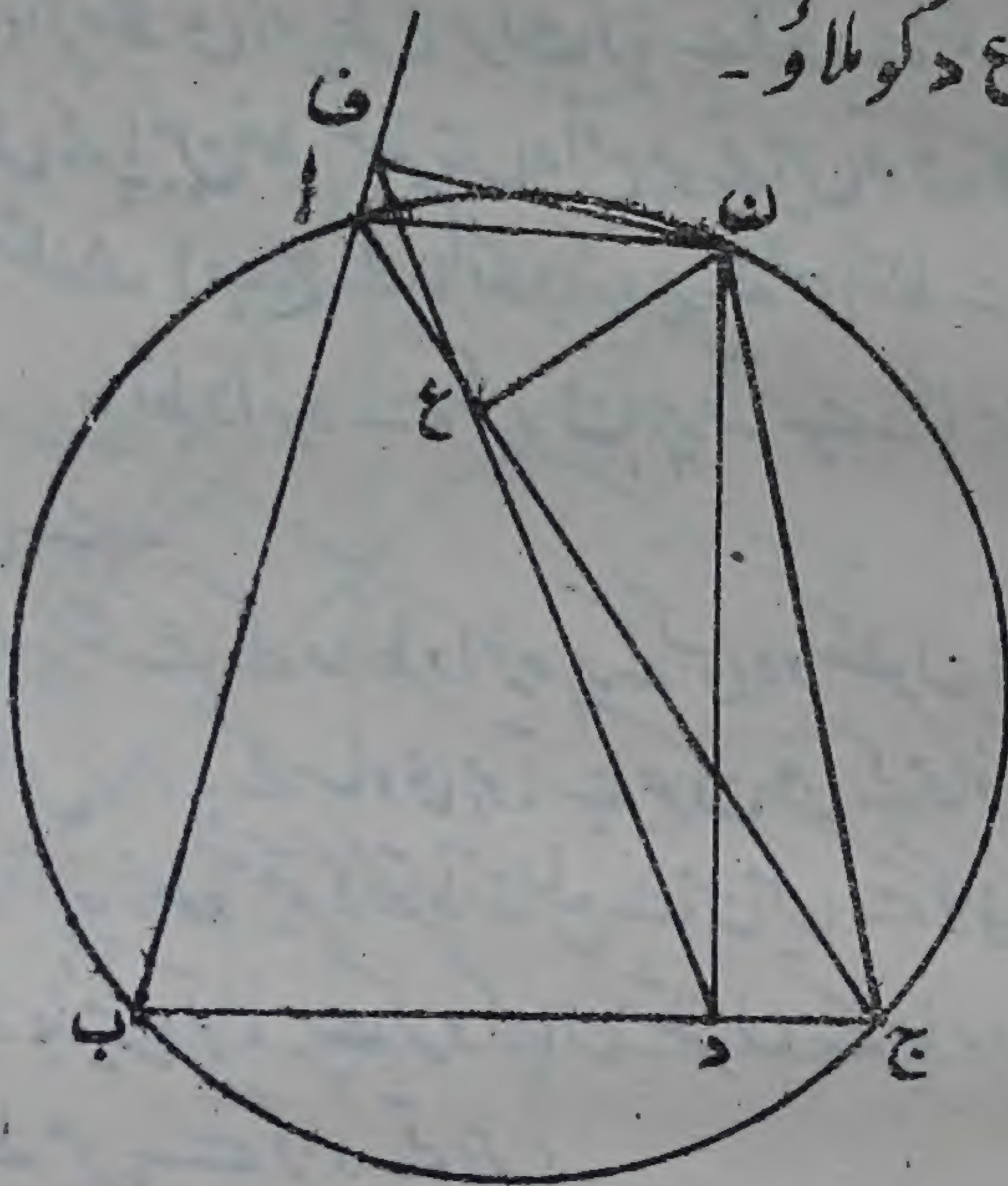
(۶) ایک متوازی الاضلاع کے ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتروں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۷) کسی ذواربعۃ الاضلاع میں وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ مقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط پر کے مربعوں کے مجموعہ کا دوچند ہوتا ہے۔

(۸) مثلث اب ج کے خطوطِ وسطی کا نقطۂ تراکز و ہے۔ ثابت کرو کہ
اب^2 + ب ج^2 + ج ا^2 = ۳ (و ا^2 + و ب^2 + و ج^2)

(۹) مثلث اب ج میں ب ج پر نقطہ لا ایسا ہے کہ م × ب لا = ن × لا ج
ثابت کرو کہ م × اب^2 + ن × ا ج^2 = م × ب لا^2 + ن × لا ج^2 + (م + ن) × ا لا^2
(اپولونیئس کا مسئلہ)

[اشارہ۔ فرض کرو کہ ا لا̂ ج = ط
اب^2 = ا لا^2 + ب لا^2 + ۲ ب لا . ا لا . جم ط ..... (۱)
ا ج^2 = ا لا^2 + لا ج^2 − ۲ لا ج . ا لا . جم ط ..... (۲)
(۱) کو م سے اور (۲) کو ن سے ضرب دے کر جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ مسئلہ دفعہ ۳۹ کی عام شکل ہے]۔

۴۰۔ مسئلہ۔ (سمسن کا خط) ایک مثلث کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو عمودوں کے پائین ایک خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث اب ج کے حائط دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن سے مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، اب پر عمود بالترتیب ن د، ن ع، ن ف کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ نقاط د، ع، ف

ہم خط ہیں۔

ف ع، ع د کو ملاؤ۔

چونکہ ن فˆ ا = ن عˆ ا = قائمہ

اس لیے نقاط ن، ف، ا، ع مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے ن عˆ ف = ن اˆ ف = ن جˆ ب

(کیونکہ نقاط ن، ا، ب، ج مشترک المحیط ہیں)۔

نیز ن عˆ ج = ن دˆ ج = قائمہ زاویہ

اس لیے نقاط ن، ع، د، ج مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے ن عˆ د تکمل ہے ن جˆ د کا

یعنی ن عˆ د تکمل ہے ن عˆ ف کا

یعنی ف ع د خطِ مستقیم ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ خط د ع ف کو مثلث ا ب ج کے لحاظ سے حائط دائرہ پر کے نقطہ ن کا خطِ پائین یا سمن خط کہتے ہیں۔

امثلہ ۹

(۱) (ا) ایک نقطہ ق سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں۔

اگر عمودوں کے پائین خطِ مستقیم میں ہوں تو ثابت کرو کہ ق، مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر ہے۔

(ب) اگر نقطۂ ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ق سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کے پائین خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں تو ق کا طریق معلوم کرو۔

(۲) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ب ج پر عمود ن د نکالا گیا ہے اور یہ حائط دائرہ سے مکرر ن، پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا خطِ پائین ا ن، کے متوازی ہے۔

(۳) کسی مثلث کے حائط دائرہ پر کے کسی دو نقطوں ن اور ق کے سمسن خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ن ق کے محاذی دائرہ پر بنتا ہے۔

(۴) اگر چار خطوطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع سے جن میں سے کوئی دو باہم متوازی نہ ہوں چار مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے چاروں حائط دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۵) کسی نقطہ کا سمسن خط نقطۂ مذکور کو مثلث کے عمودی مرکز سے ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔

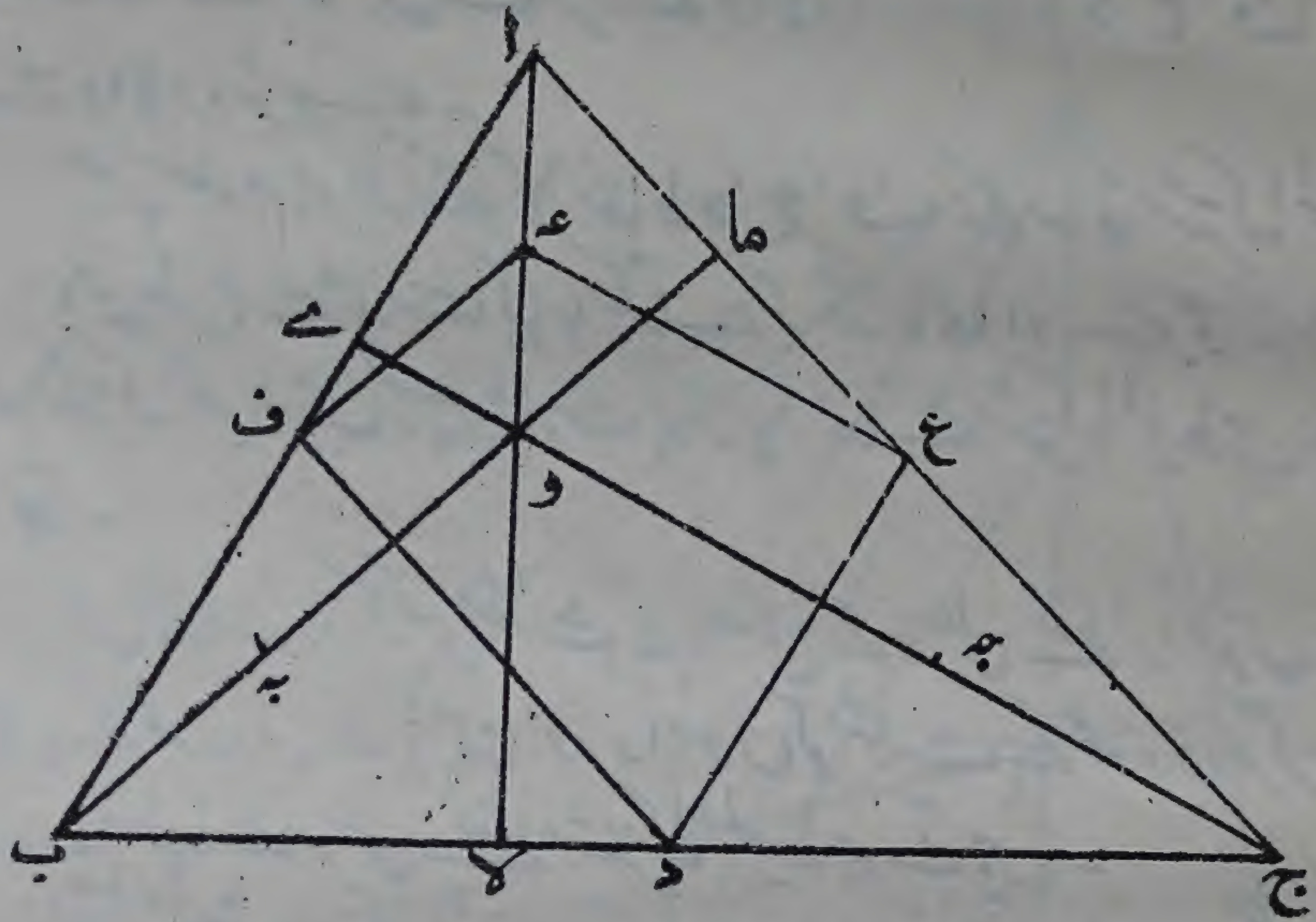
اہم مسئلہ۔ (نو نقطی دائرہ) کسی مثلث میں اضلاع کے وسطی نقطے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور مثلث کے عمودی مرکز کو راسوں سے ملانے والے خطوں کے وسطی نقطے مشترک المحیط ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے بالترتیب د، ع، ف ہیں۔

اور راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین بالترتیب لا، ما، ے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ اِن عمودوں کا نقطۂ تراکز یعنی مثلث کا عمودی مرکز و ہے اور ا و، ب و، ج و کے وسطی نقطے بالترتیب عہ، بہ، جہ ہیں۔

پہلے ہم ثابت کرینگے کہ عہ، بہ، جہ مشترک المحیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔

چونکہ د اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ب ج اور ب ا کے

اس لیے د ف // اج

نیز چونکہ عہ اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں او اور اب کے
اس لیے عہ ف // ب ما
اس لیے د ف اور عہ ف کا درمیانی زاویہ مساوی ہے اج اور ب ما کے درمیانی زاویہ کے جوکہ قائمہ ہے

∴ د فَ عہ = قائمہ زاویہ

اسی طرح د غَ عہ = قائمہ زاویہ

اس لیے نقطہ عہ نقاط د، غ، ف کے ساتھ مشترک المحیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نقاط بہ اور جہ بھی مشترک المحیط ہیں د، غ، ف کے ساتھ۔
پس ثابت ہوا کہ عہ، بہ، جہ مشترک المحیط ہیں د، غ، ف کے ساتھ۔
اب ہم ثابت کرینگے کہ نقاط لا، ما، ے بھی مشترک المحیط ہیں د، غ، ف کے ساتھ۔
چونکہ عہ لاَ د قائمہ زاویہ ہے اور نیز عہ فَ د بھی قائمہ ہے۔
اس لیے نقاط عہ، ف، لا، د مشترک المحیط ہیں۔

یعنی نقطہ لا نقاط ع، ف، د میں سے گزرنے والے دائرہ پر واقع ہے
لیکن نقاط ع، ف، د میں سے گزرنے والا دائرہ نقاط د، ع، ف میں سے
گزرنے والا دائرہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ نقطہ لا نقاط د، ع، ف کے ساتھ مشترک المحیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نقاط ما اور ے بھی نقاط د، ع، ف
کے ساتھ مشترک المحیط ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ لا، ما، ے مشترک المحیط ہیں د، ع، ف
کے ساتھ۔

پس ثابت ہوا کہ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطے، راسوں سے متقابل کے
اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور راسوں کو مثلث کے عمودی مرکز سے
ملانے والے خطوط کے وسطی نقطے مشترک المحیط ہوتے ہیں۔

تعریف: کسی مثلث کے مندرجۂ بالا نو نقطوں میں سے گزرنے والے
دائرہ کو مثلث کا نو نقطی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو نو نقطی مرکز کہتے ہیں۔

۴۲۔ مسئلہ۔ کسی مثلث میں (۱) نو نقطی مرکز، حائط مرکز اور
عمودی مرکز کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔
نیز (۳) ہندسی مرکز، ہم خط ہوتا ہے حائط مرکز، نو نقطی مرکز اور عمودی مرکز کے ساتھ۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا حائط مرکز س ہے، عمودی مرکز و ہے
اور نو نقطی مرکز ن ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ (۱) نقطہ ن خط س و کا نقطۂ تنصیف ہے اور
(۲) نو نقطی دائرہ کا قطر حائط دائرہ کے نصف قطر س ا کے مساوی ہے اور نیز (۳)
مثلث کا ہندسی مرکز یعنی مرکز ثقل خط س و پر ہے۔

(۱) دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق چونکہ نو نقطی دائرہ نقاط د اور لا
میں سے گزرتا ہے۔
اس لیے نو نقطی مرکز د لا کے عمودی منصف پر ہوگا۔
اسی طرح سے نو نقطی مرکز ما ع کے عمودی منصف پر بھی ہوگا۔

یہ دونوں عمودی منصف و س کے وسطی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

پس و س کے وسطی نقطہ پر نونقطی مرکز ن ہوگا۔

(۲) چونکہ نونقطی دائرہ نقاط د، لا، عہ میں سے گزرتا ہے اور چونکہ د لاˆ عہ قائمہ زاویہ ہے اس لیے عہ د نونقطی دائرہ کا ایک قطر ہے اس لیے عہ د نونقطی مرکز ن میں سے گزرتا ہے۔

چونکہ و ا اور و س کے وسطی نقطے بالترتیب عہ اور ن ہیں،
اس لیے عہ ن (جو نونقطی دائرہ کا نصف قطر ہے) متوازی ہے اور نصف ہے ا س کا۔
اس لیے نونقطی دائرہ کا قطر عہ د مساوی ہے ا س کے جو حائط دائرہ کا نصف قطر ہے۔

(۳) چونکہ عہ د متوازی ہے ا س کے اور ا عہ متوازی ہے س د کے
اس لیے ا عہ مساوی ہے س د کے
اس لیے ا و دگنا ہے س د کا

فرض کرو کہ وسطانیہ ا د خط س و سے ث پر ملتا ہے
اب تشابہ مثلثات ا ث و اور د ث س میں

$$\frac{\text{ا ث}}{\text{د ث}} = \frac{\text{ا و}}{\text{د س}} = \frac{۲}{۱}$$

اس لیے وسطانیہ ا د کی داخلی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں ث پر ہوتی ہے۔
اس لیے ث مثلث ا ب ج کا ہندسی مرکز (مرکزِ ثقل) ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا (۳) میں تشابہ مثلثات ا ث و اور د ث س سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{و ث}}{\text{ث س}} = \frac{\text{ا و}}{\text{د س}} = \frac{۲}{۱}$$

یعنی مثلث کا مرکزِ ثقل ث، عمودی مرکز و اور حائطہ مرکز س کو ملانے والے خط کی داخلی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں کرتا ہے۔

امثلہ ۱۰

(۱) دفعہ ۱۴ کے مسئلہ کو استعمال کرنے کے بغیر اُسی دفعہ کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ

(ا) لا مشترک المحیط ہے عہ، بہ، جہ کے ساتھ
(ب) د مشترک المحیط ہے عہ، بہ، جہ کے ساتھ
(ج) عہ مشترک المحیط ہے لا، ما، ے کے ساتھ
(د) د مشترک المحیط ہے لا، ما، ے کے ساتھ

(۲) دفعہ ۱۴ کی شکل میں ثابت کرو کہ عہ ف د جہ مستطیل ہے۔
(۳) دفعہ ۱۴ کی شکل میں ثابت کرو کہ عہ د = بہ ع = جہ ف
(۴) ثابت کرو کہ ترقیم سابقہ کے مطابق ا د اور عہ س ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

(۵) معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ او = ۲ د جم ا

(۶) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ دونوں معلوم ہیں۔ مثلث کے نو نقطی مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(۷) مثلث اب ج کے جانبی دائروں کے مرکز ہ، ہ۲، ہ۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث اب ج کا حائط دائرہ مثلث ہ ہ۲ ہ۳ کا نو نقطی دائرہ ہے اور اس سے حاصل کرو کہ مثلث اب ج کا حائط دائرہ مثلث ہ ہ۲ ہ۳ کے اضلاع کی تنصیف کرتا ہے۔

(۸) مثلث اب ج کا عمودی مرکز و ہے ثابت کرو کہ مثلث اب ج کا نو نقطی دائرہ مثلثات او ب، ب و ج اور ج و ا کا بھی نو نقطی دائرہ ہے۔

(۹) مثلث کا ایک راس اور نو نقطی دائرہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۱۰) ایک مثلث کا ایک راس، عمودی مرکز اور نو نقطی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں، مثلث بناؤ۔

(۱۱) ایک مثلث کے دو راسی اور نو نقطی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں مثلث بناؤ۔

(۱۲) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے مثلث پائین کا ایک ضلع اور ایک زاویہ مستقل ہیں۔

۳۴ ۔ مسئلہ ۔ مثلث اب ج کے زاویہ ا کا اندرونی منصف قاعدہ ب ج سے د پر ملے تو

اب × اج = اد۲ + ب د . د ج

مثلث اب ج کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اد ممدودہ حائط دائرہ سے ع پر ملتا ہے۔ ج ع کو ملاؤ۔

مثلثات اب د اور اع ج میں

اب̂د = اع̂ج

ب اˆد = ع اˆج

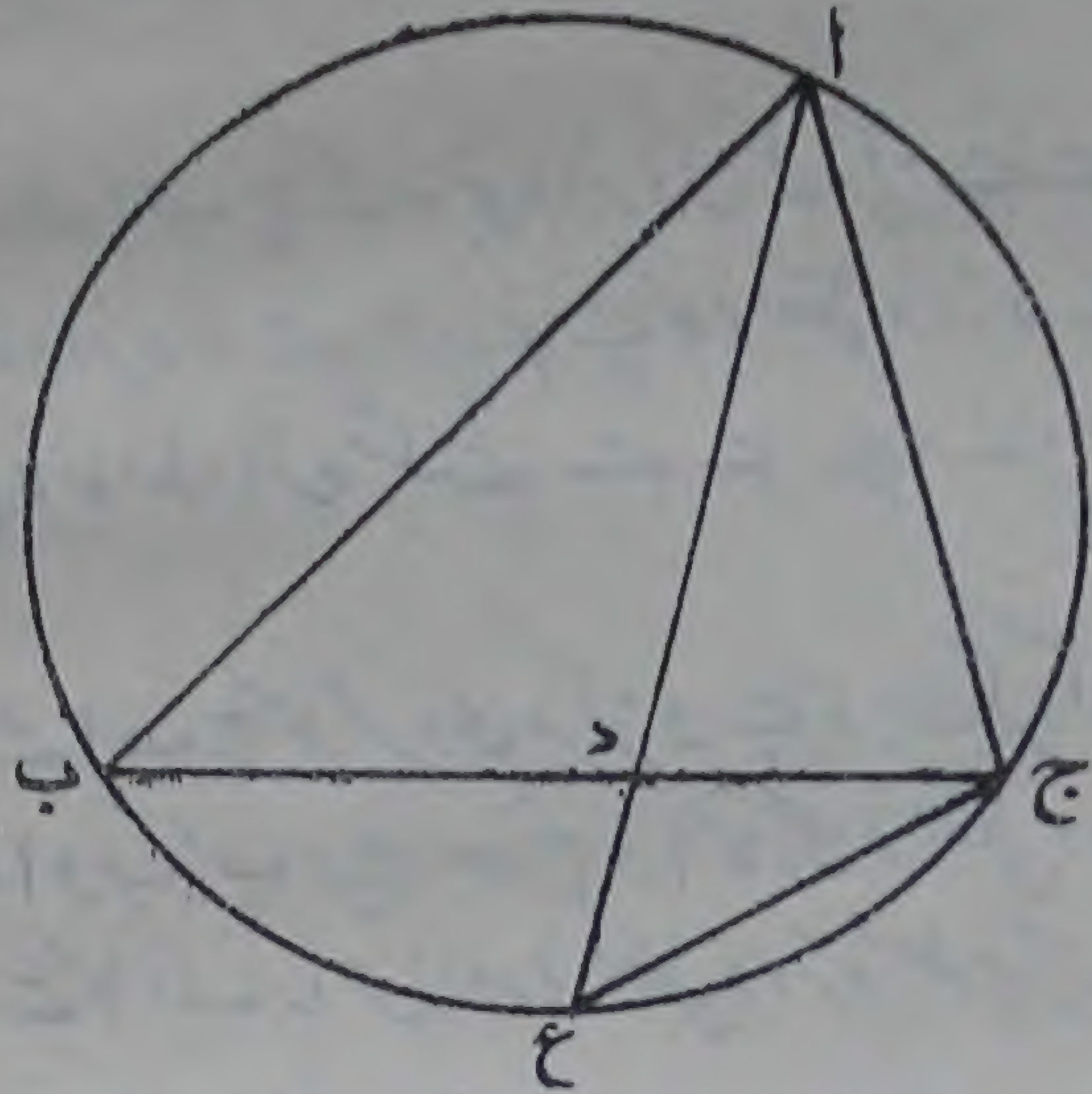
∴ مثلثات اب د اور اع ج متشابہ ہیں۔

∴ اب / اع = اد / اج

∴ اب × اج = اد × اع

= اد (اد + دع)

= اد^{2} + اد × دع

= اد^{2} + بد × دج

[کیونکہ وتر اع اور ب ج ایک دُوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں] -

پس مسئلہ ثابت ہوا

مشق - اگر اˆ کا بیرونی مُنصِّف ب ج ممدودہ سے د پر ملے تو ثابت کرو کہ اب × اج = ب د × ج د - اد^{2}

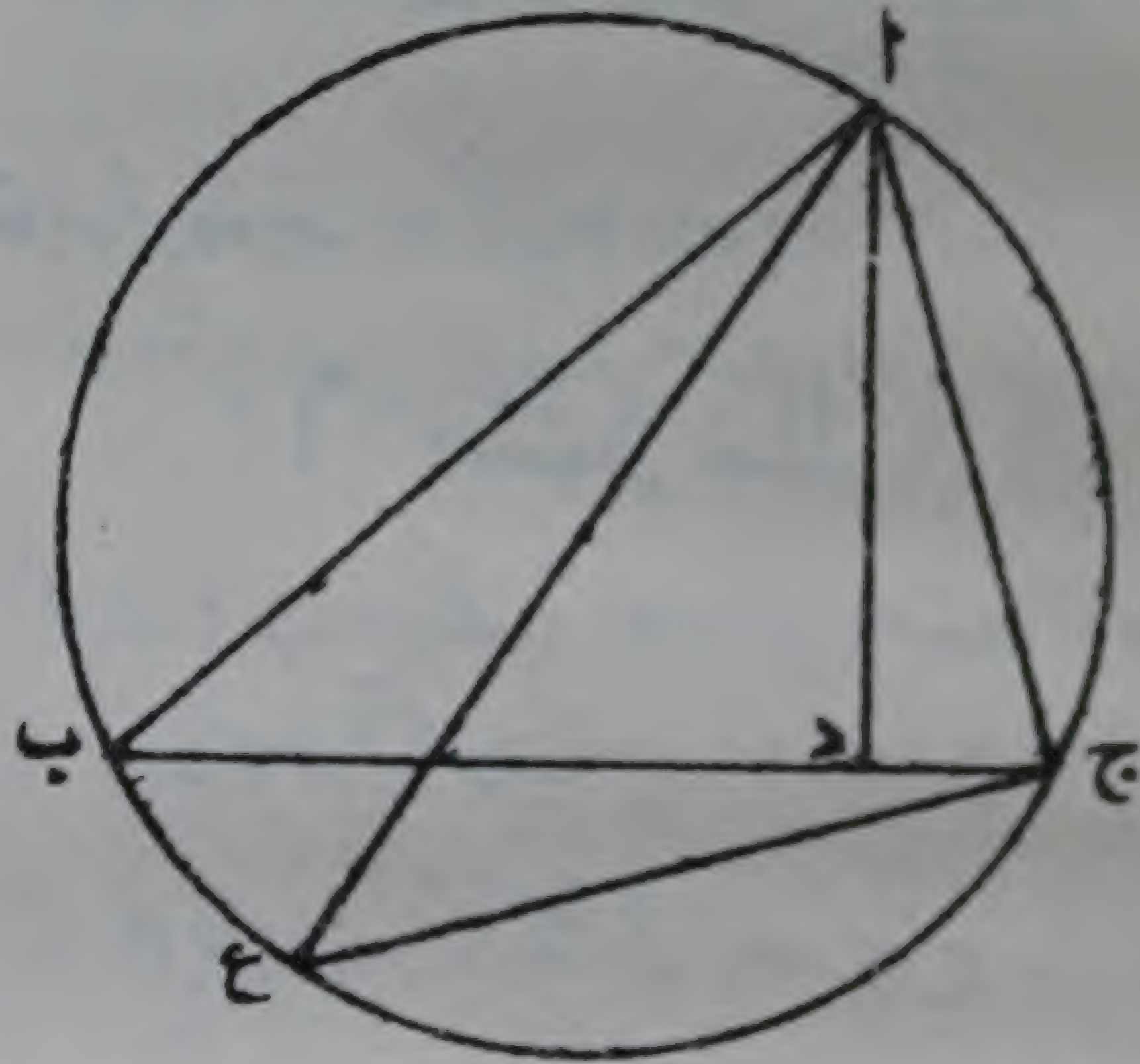
نوٹ: اگر دفعہ بالا کی شکل میں اب = اج تو اج^{2} = اد × اع - اس نتیجہ کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ اگر مثلث متساوی الساقین ا ب ج کے رأس ا میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو قاعدہ یعنی محدود خط ب ج سے د پر اور حائط دائرہ سے ع پر ملے تو

اج^{2} = اد × اع

۴۴ - اگر مثلث ا ب ج کے رأس ا سے ب ج پر عمود ا د ہو

اور ا ع مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا قطر ہو تو ا ب × ا ج = ا د × ا ع

ج ع کو ملاؤ

مثلثات ا ب د اور ا ع ج میں

ا بْ د = ا عْ ج (کیونکہ یہ ایک ہی قوس کے اندر کے زاویے ہیں)

اور ا دْ ب = ا جْ ع (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اس لیے مثلثات ا ب د اور ا ع ج متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ا ج}}$

اس لیے ا ب × ا ج = ا د × ا ع - جو ثابت کرنا تھا۔

نوٹ:- اگر عمود ا د کو $\text{ع}_{\text{ا}}$ سے تعبیر کیا جائے تو معمولی ترقیم کے مطابق اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

بَ × جَ = ۲ ر × $\text{ع}_{\text{ا}}$ جہاں ر حائط دائرہ کا نصف قطر ہے۔

نیز چونکہ مثلث ا ب ج کا رقبہ $\triangle = \frac{\text{اَ} \times \text{ع}_{\text{ا}}}{۲}$

اس لیے $\text{ع}_{\text{ا}} = \frac{۲\triangle}{\text{اَ}}$

ع کی اس قیمت کو اوپر کے نتیجہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{بَ جَ} = ۲ \, ر \times \frac{۲ \Delta}{\text{اَ}}$$

یعنی حائط دائرہ کا نصف قطر $ر = \frac{\text{اَ بَ جَ}}{۴ \Delta}$

(مقابلہ کرو دفعہ ۲۷ نتیجہ ۳ سے)

امثلہ ۱۱

(۱) مثلث ا ب ج کے $\hat{\text{ا}}$ کا داخلی ناصف قاعدہ ب ج سے د پر ملتا ہے۔ ا د کا طول محسوب کرو۔

معمولی ترقیم کے مطابق $\text{ب د} = \frac{\text{جَ اَ}}{\text{بَ + جَ}}$ اور $\text{د ج} = \frac{\text{بَ اَ}}{\text{بَ + جَ}}$

ازروئے دفعہ ۴۳، $\text{بَ جَ} = \text{ا د}^۲ + \text{ب د} \times \text{د ج}$

$$= \text{ا د}^۲ + \frac{\text{اَ}^۲ \, \text{بَ جَ}}{(\text{بَ + جَ})^۲}$$

اس لیے $\text{ا د}^۲ = \text{بَ جَ} \left[۱ - \frac{\text{اَ}^۲}{(\text{بَ + جَ})^۲} \right] = \text{بَ جَ} \left[\frac{(\text{بَ + جَ + اَ})(\text{بَ + جَ - اَ})}{(\text{بَ + جَ})^۲} \right]$

اگر مثلث کے محیط یعنی اَ + بَ + جَ کو ۲ س سے تعبیر کیا جائے

$$\text{تو ا د}^۲ = \frac{\text{بَ جَ} \times ۲ \, \text{س} \, (۲ \, \text{س} - ۲ \, \text{اَ})}{(\text{بَ + جَ})^۲}$$

$$\therefore \text{ا د} = \frac{۲ \sqrt{\text{بَ جَ} \, \text{س} \, (\text{س} - \text{اَ})}}{(\text{بَ + جَ})}$$

$$= \frac{۲ \, \text{بَ جَ}}{\text{بَ + جَ}} \, \text{جم} \, \frac{\text{ا}}{۲} \quad \text{کیونکہ جم} \, \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{اَ})}{\text{بَ جَ}}}$$

(۲) اگر مثلث اب ج کے زاویہ ا کا خارجی منصف ب ج سے د پر ملے تو

ثابت کرو کہ　　اد = (۲ بَ جَ)/(جَ ∽ بَ) × جب ۱/۲

(۳) مثلث بناؤ جس کا قاعدہ راسی زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب معلوم ہیں۔

(۴) مثلث اب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز م ہے اور ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز مَ ہے۔ ے مے ضلع ب ج سے د پر اور حائط دائرہ سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

اد × اف = اے × ام

(۵) △ اب ج میں اب ≠ اج اور ضلع ب ج پر نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ

اب × اج = اد² + ب د × دج

ثابت کرو کہ اد زاویہ ب اج کا اندرونی ناصف ہے۔

فرض کرو کہ اد مثلث اب ج کے حائط دائرہ سے ع پر ملتا ہے۔

(دیکھو شکل دفعہ ۴۳)

تب　اد² + ب د × دج = اد² + اد × دع = اد × اع

اس لیے　اب × اج = اد × اع

یعنی　اب/اد = اع/اج

اور　اب̂د = اع̂ج

اس لیے امثلہ ۶۲ سوال ۹ کی رُو سے

یا تو　اد̂ب = اج̂ع .... (۱)

یا　اد̂ب + اج̂ع = ۲ قائمہ زاویے .... (۲)

اب ہم ثابت کرینگے کہ نتیجہ (۲) ناممکن ہے

اگر　اد̂ب + اج̂ع = ۲ قائمہ زاویے

تو　اج̂ع = اد̂ج　یعنی　اج̂د = ج ع̂ ا = ج ب̂ ا

یعنی اب = اج جو شرائط سوال کے خلاف ہے۔

اس لیے ا د̂ ب = ا ج̂ ع

اس لیے ب ا̂ د = ع ا̂ ج یعنی اد زاویہ ب اج کا اندرونی ناصف ہے۔

(۶) مثلث اب ج میں اب = اج، قاعدہ ب ج یا ب ج محدودہ پر کوئی نقطہ د ہے، ثابت کرو کہ مثلثات اب د اور اج د کے حائط دائروں کے نصف قطر مساوی ہیں۔

(۷) سوال ۶ میں اگر اب اور اج مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات اب د اور اج د کے نصف قطروں کی نسبت اب : اج کے مساوی ہے۔

(۸) ایک ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔ دائرہ پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ن ا × ن ج = ن ب × ن د

(اشارہ۔ ن سے اج پر کا عمود = ن سے ب د پر کا عمود)

(۹) ایک مثلث کا قاعدہ راُسی زاویہ دیے گئے ہیں۔ وہ مثلث بناؤ جس کے اضلاع کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر ایک دیے ہوئے رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تینوں ضلعوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۱۱) ایک دائرہ کے وتر اب کا عمودی منصف قوس سے ج پر ملتا ہے اور قوس اج ب پر کوئی نقطہ د ہے، ثابت کرو کہ اج² = اد × دب + دج² اس کی مدد سے حاصل کرو کہ اد × دب بڑے سے بڑا ہوگا اگر نقطہ د نقطہ ج پر منطبق ہو۔

(۱۲) اب ج د ایک مشترک المحیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ

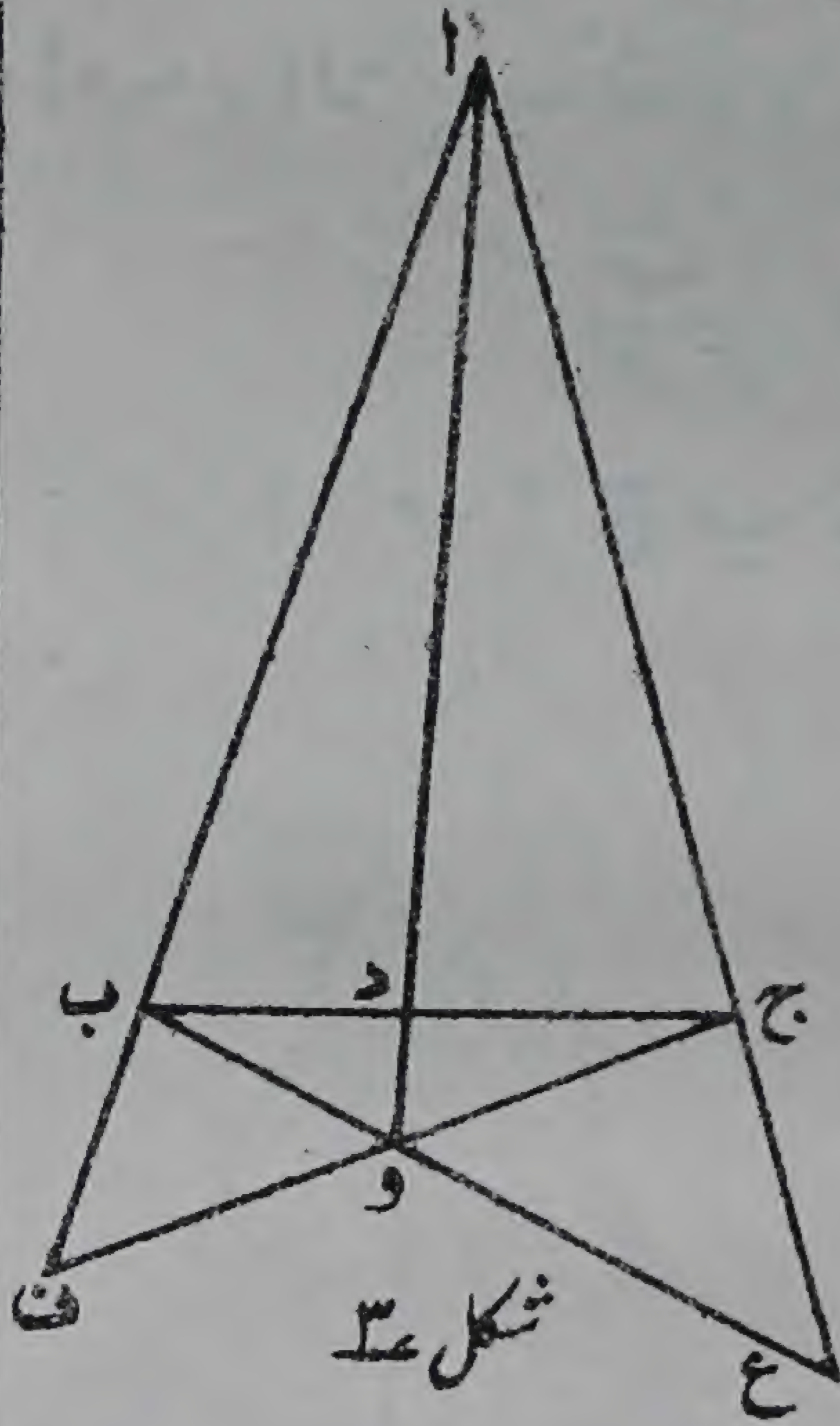
$$\frac{\text{اب × اد + جب × جد}}{\text{با × بج + دا × دج}} = \frac{\text{اج}}{\text{بد}}$$

(۱۳) اب ج د ایک مشترک المحیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے اس کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے اب، ب ج، ج د، د ا پر عمود نکالے گئے ہیں جن کے طول بالترتیب $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، $ع_4$ ہیں اور اسی نقطہ ن سے وتروں اج، ب د پر کے عمودوں کے طول بالترتیب ع′، ع″ ہیں ثابت کرو کہ

$$ع' ع'' = ع_1 ع_3 = ع_2 ع_4$$

۵۴۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج میں سے گزرنے والے متراکز خط مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملیں تو

$$\frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ا ف}{ف ب} = +1$$

شکل ۳ — شکل ۲ — شکل ۱

فرض کرو کہ اد، ب ع، ج ف کا نقطۂ تراکز و ہے۔
اگر نقطہ و مثلث کے اندر ہو [دیکھو شکل (۱)] تو تینوں نسبتیں

$\frac{ب د}{د ج}$، $\frac{ج ع}{ع ا}$، $\frac{ا ف}{ف ب}$ مثبت ہیں۔

اگر نقطہ و مثلث کے باہر ہو [دیکھو اشکال (۲) اور (۳)] تو مندرجۂ بالا نسبتوں میں سے صرف ایک مثبت ہو گی اور باقی دو منفی۔
پس ہر صورت میں مندرجۂ بالا تینوں نسبتوں کا حاصل ضرب مثبت ہو گا۔

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{\Delta ا ب د}{\Delta ا د ج} = \frac{\Delta و ب د}{\Delta و د ج} = \frac{\Delta ا و ب}{\Delta ا و ج}$$ [بموجب دفعہ ۱۳ (ب)]

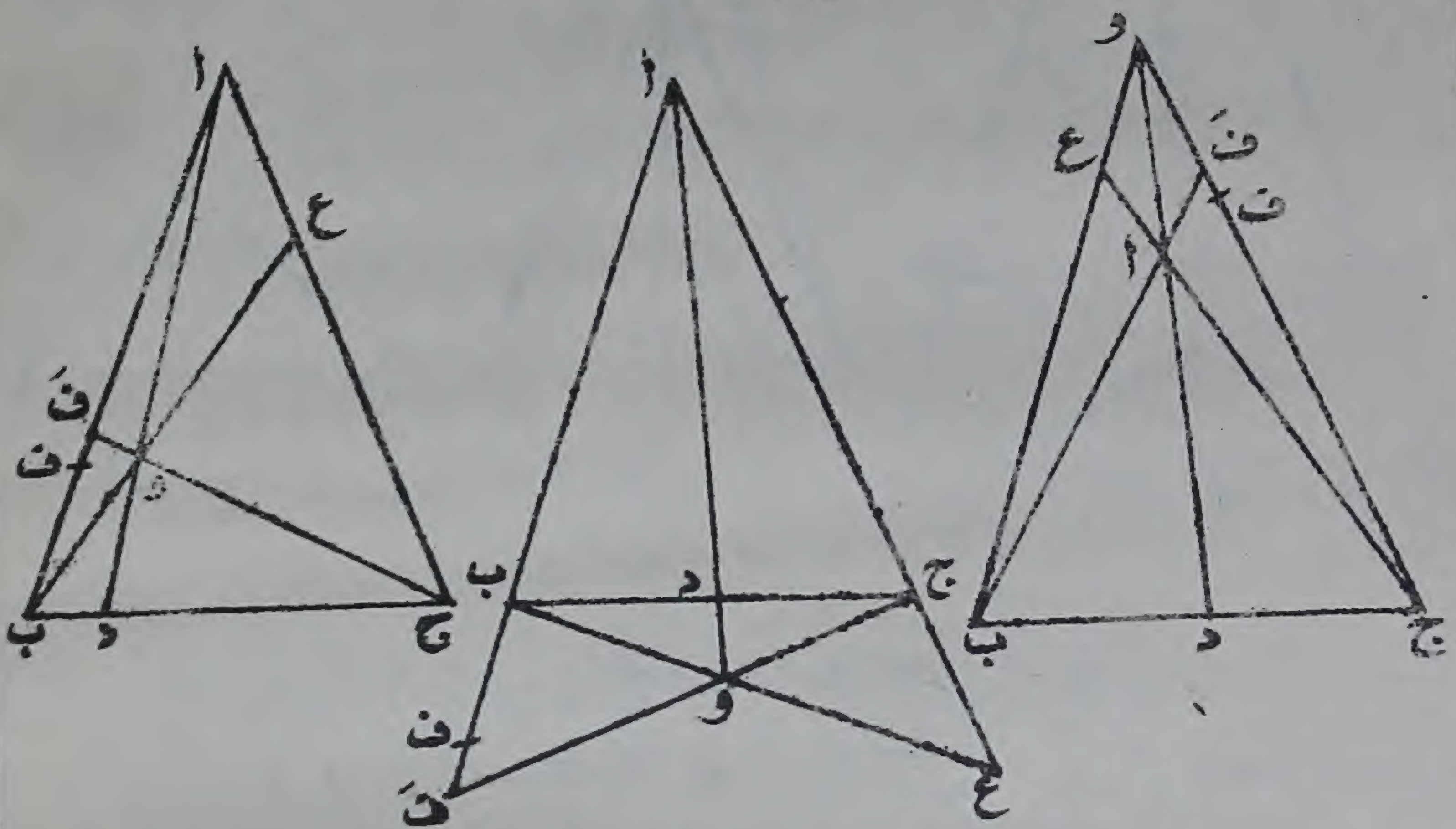
اسی طرح سے $\frac{ج ع}{ع ا} = \frac{\Delta ب و ج}{\Delta ب و ا}$ اور $\frac{ا ف}{ف ب} = \frac{\Delta ج و ا}{\Delta ج و ب}$

اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\Delta\,\text{اوب}}{\Delta\,\text{اوج}} \times \frac{\Delta\,\text{بوج}}{\Delta\,\text{بوا}} \times \frac{\Delta\,\text{جوا}}{\Delta\,\text{جوب}}$

$= +1$

اس مسئلہ کا عکس :- اگر مثلث اب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، اب پر بالترتیب نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = +1$$

تو خطوط ا د، ب ع، ج ف متراکز ہونگے ۔

فرض کرو کہ ا د اور ب ع کا نقطۂ تقاطع و ہے نیز فرض کرو کہ ج و ضلع اب سے فَ پر ملتا ہے ۔

چونکہ ا د، ب ع، ج فَ متراکز خط ہیں

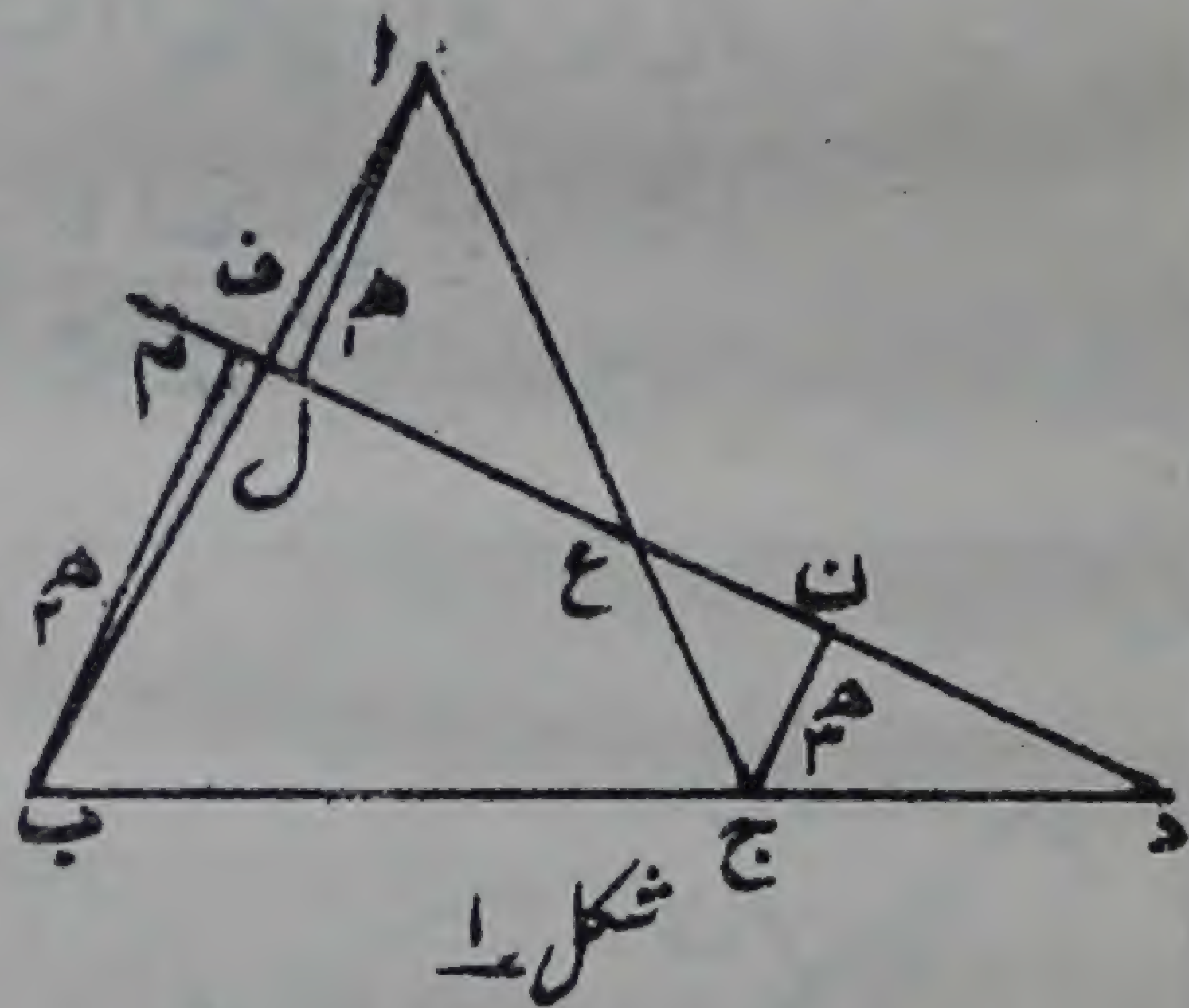
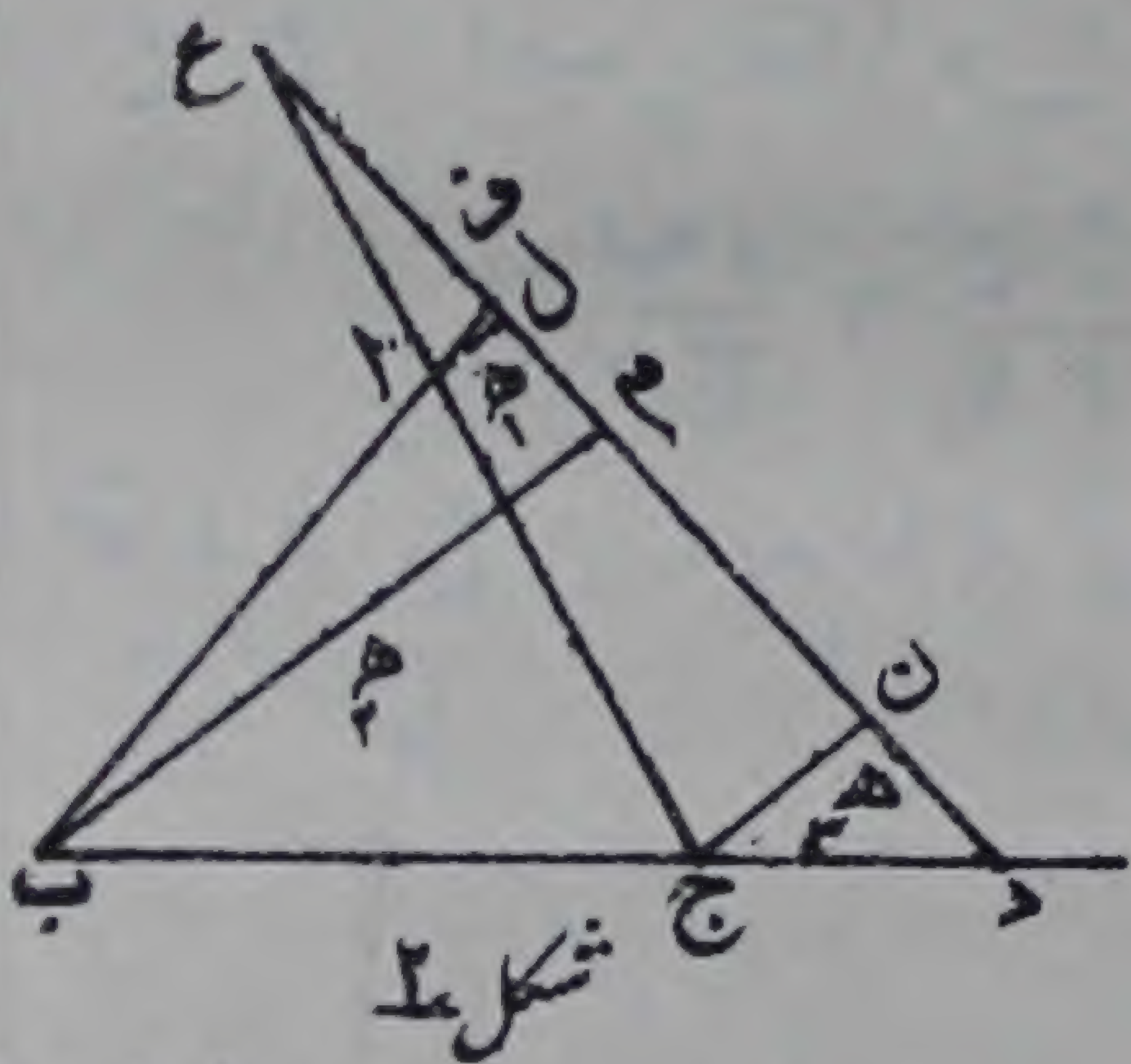
اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا فَ}}{\text{فَ ب}} = +1$

لیکن بموجب مفروض $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = +1$

اس لیے $\frac{\text{اف}}{\text{فَ ب}} = \frac{\text{اف}}{\text{ف ب}}$ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

اس لیے نقطہ فَ نقطہ ف پر منطبق ہے۔
پس ثابت ہوا کہ خطوط ا د، ب ع، ج ف متراکز ہیں۔
نوٹ۔ اس مسئلہ کو کیوا (Ceva) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

۶۴ مسئلہ۔ اگر ایک خطِ مستقیم ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب نقاط د، ع، ف پر قطع کرے تو

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{اف}}{\text{ف ب}} = -1$$

شکل ۲

شکل ۱

قاطع مثلث کے دو ضلعوں کو داخلاً اور ایک ضلع کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۱)] یا تینوں ضلعوں کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۲)]

اس لیے تین نسبتوں $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$، $\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}}$، $\frac{\text{اف}}{\text{ف ب}}$ میں سے دو مثبت اور ایک منفی ہوگی یا تینوں منفی ہونگی۔

اس لیے ہر صورت میں ان نسبتوں کا حاصل ضرب منفی ہوگا۔ اب نقاط ا، ب، ج سے قاطع پر بالترتیب عمود ا ل، ب م، ج ن نکالو۔ اور فرض کرو کہ ان کے طول بالترتیب $ه_۱$، $ه_۲$، $ه_۳$ ہیں۔

تشابہ مثلثات سے بلا لحاظ علامت کے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ھ}_2}{\text{ھ}_3}\text{، }\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{ھ}_3}{\text{ھ}_1} \text{ اور } \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ھ}_1}{\text{ھ}_2}$$

اس لیے صرف عددی قیمت کو ملحوظ رکھنے سے

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ھ}_2}{\text{ھ}_3} \times \frac{\text{ھ}_3}{\text{ھ}_1} \times \frac{\text{ھ}_1}{\text{ھ}_2} = 1$$

چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس حاصل ضرب کی علامت منفی ہے

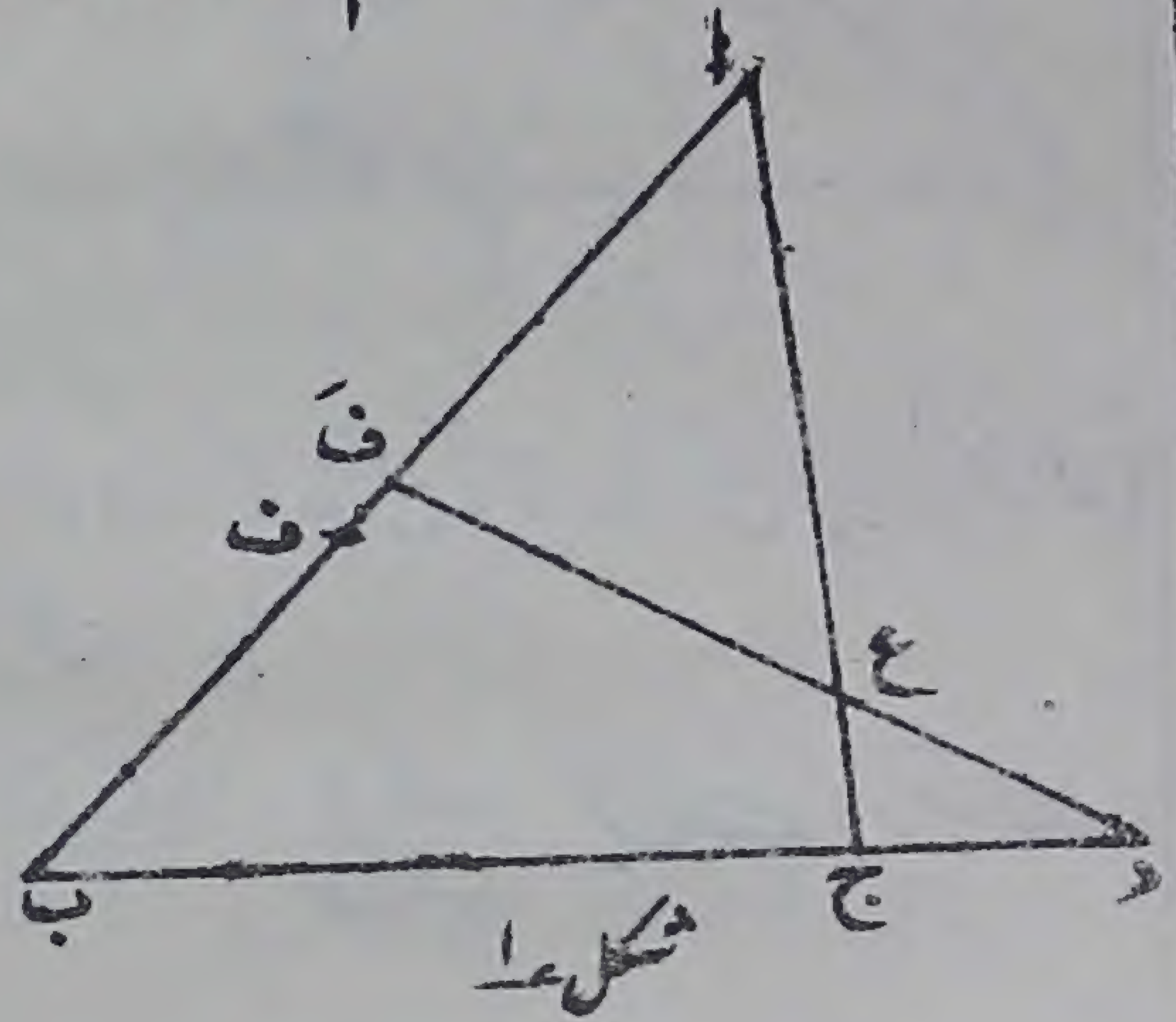
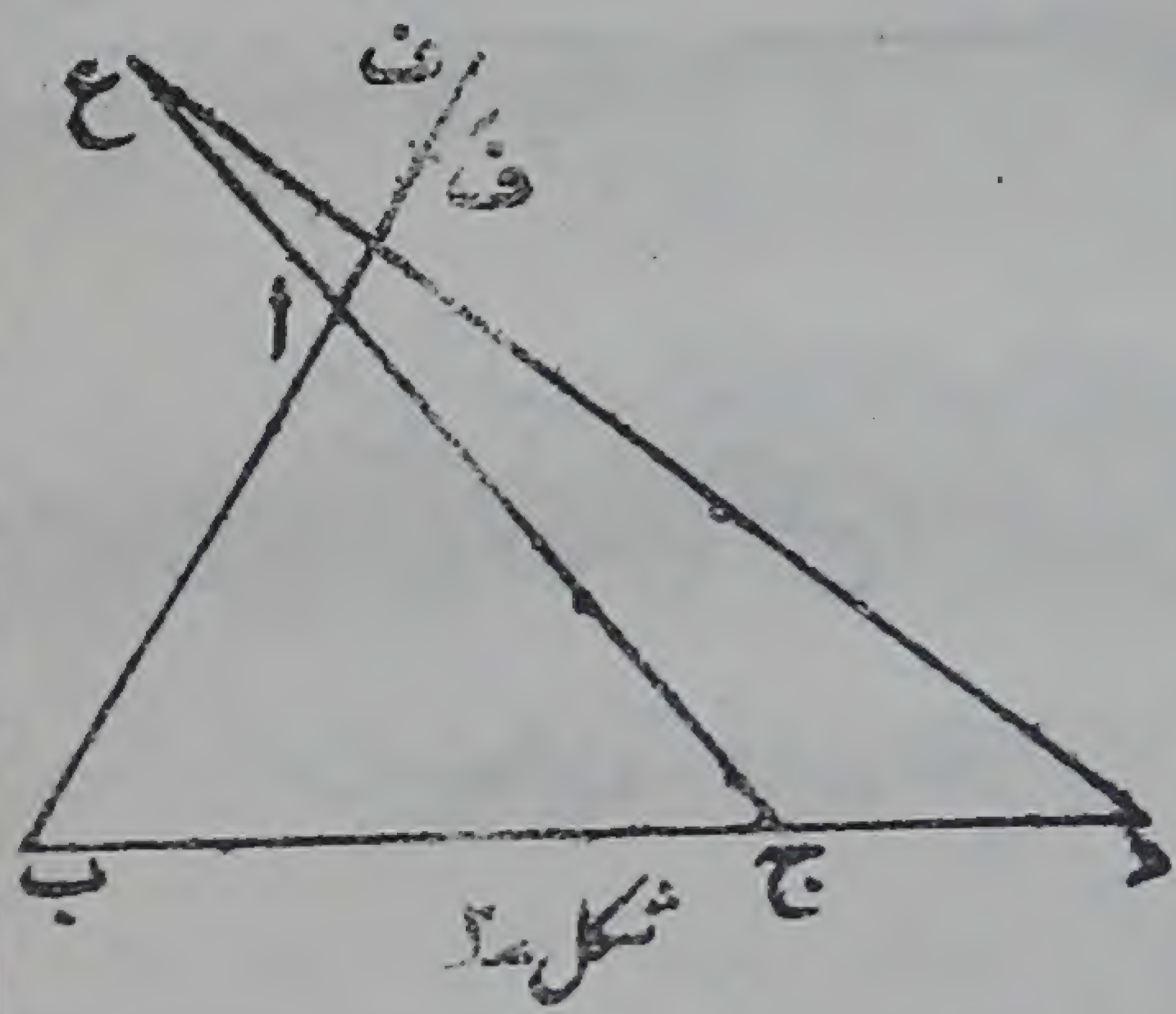
اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = -1$

اس مسئلہ کا عکس :— اگر ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = -1$$

تو نقاط د، ع، ف ہم خط ہونگے۔

شکل ۱

شکل ۲

فرض کرو کہ د ع ضلع ا ب سے فَ پر ملتا ہے

چونکہ نقاط د، ع، فَ ہم خط ہیں

اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا فَ}}{\text{فَ ب}} = -1$

لیکن بموجب مفروض $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = -1$

اس لیے $\frac{\text{ا فَ}}{\text{فَ ب}} = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}}$ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

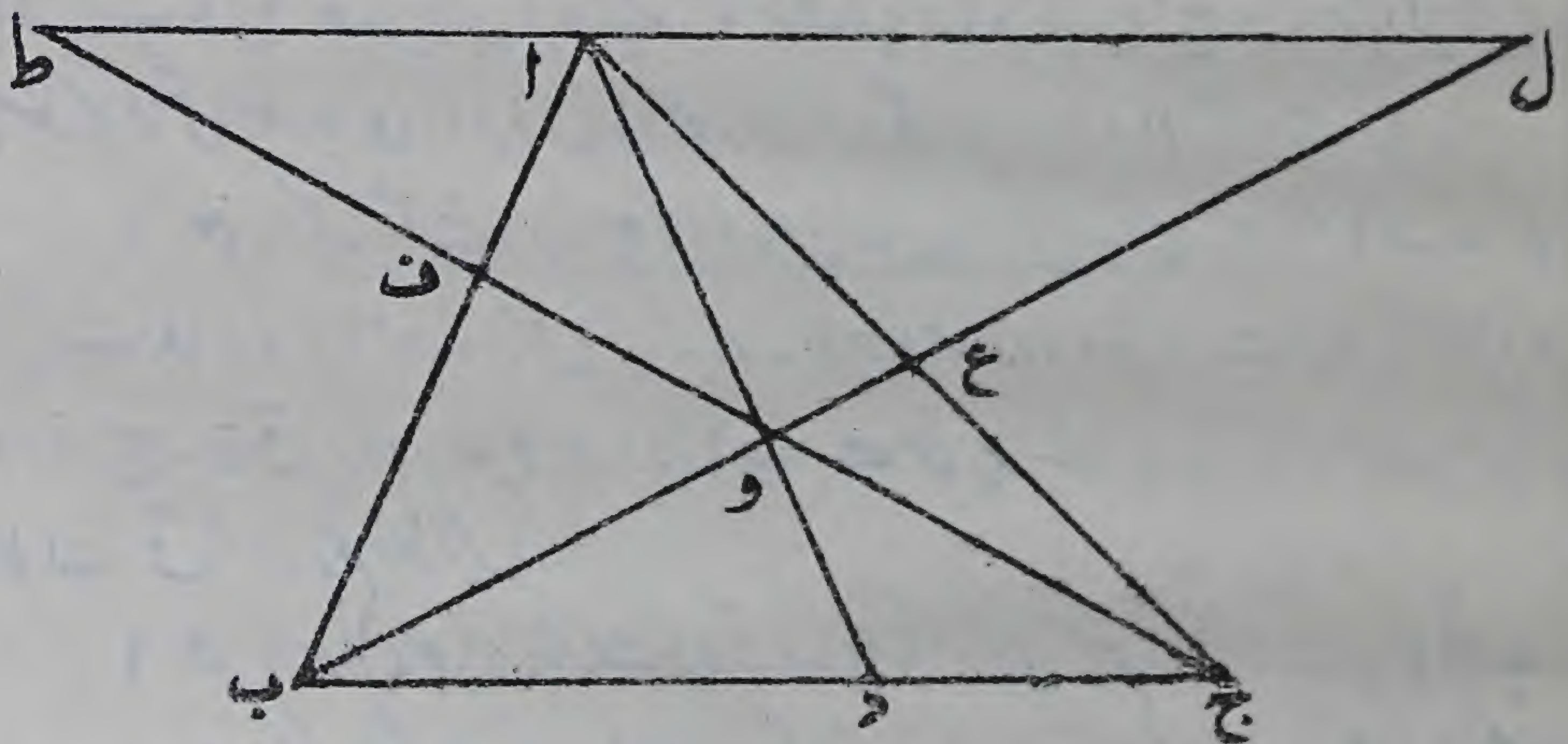
اس لیے نقطہ فَ نقطہ ف پر منطبق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں۔

نوٹ:۔ اس مسئلہ کو مینی لاس (Menelaus) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۴

(۱) کیوا کے مسئلہ کا متبادل ثبوت:۔

مثلث ا ب ج کے راسوں سے متراکز خطوط ا و، ب و، ج و کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں اور

ا میں سے گزرنے والے اور ب ج کے متوازی خط سے ب ع اور ج ف بالترتیب ل اور ط پر ملتے ہیں۔

متشابہ مثلثوں کی مدد سے $\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ط ا}}{\text{ب ج}}$

اور $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د و}} \times \frac{\text{د و}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ا و}} \times \frac{\text{ا و}}{\text{ط ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ط ا}}$

اور　ج ع / ا ع = ب ج / ا ل

اس لیے　اف / ف ب × ب د / د ج × ج ع / ع ا = ط ا / ب ج × ا ل / ط ا × ب ج / ا ل = +۱

(۲) کیوا (Ceva) کے مسئلہ کی رُو سے ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

(ا) خطوطِ وسطی متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمود متراکز ہوتے ہیں۔

(ج) اضلاع کے عمودی مُنصّف متراکز ہوتے ہیں۔

(د) زاویوں کے اندرونی مُنصّف متراکز ہوتے ہیں۔

(ع) دو زاویوں کے خارجی مُنصّف اور تیسرے کا داخلی مُنصّف متراکز ہوتے ہیں۔

(۳) مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف متراکز ہیں۔ اس مسئلہ کا مماثل مسئلہ جانبی دائروں کی صورت میں بھی بیان کرو اور ثابت کرو۔

(۴) ایک مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب نقاط د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ع ف ممدودہ ب ج سے ن پر، ف د ممدودہ ا ج سے ق پر اور د ع ممدودہ ا ب سے س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط ن، ق، س ہم خط ہیں۔

(۵) سوال ۴ میں ثابت کرو کہ ب ج کی موسیقی تقسیم د اور ن پر ہوتی ہے۔

(۶) ایک مثلث کے دو زاویوں کے اندرونی مُنصّف اور تیسرے کا خارجی مُنصّف مقابل کے اضلاع سے ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث کے زاویوں کے خارجی ناصف مقابل کے اضلاع سے جن تین نقطوں پر ملتے ہیں وہ نقطے ہم خط ہیں۔

(۸) مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج پر حائط دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب ل، م، ن پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

نقاط ل، م، ن ہم خط ہیں۔ [اشارہ۔ $\frac{\text{ب ل}}{\text{ج ل}} = \frac{\text{ب ا}^2}{\text{ج ا}^2}$]

(۹) مثلث اب ج کے اندر ایک نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ زاویوں او ب، ب و ج، ج و ا کے خارجی منصف بالترتیب اضلاع اب، ب ج، ج ا سے تین ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۱۰) تین متراکز خط اد، ب ع، ج ف مثلث اب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، اب سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتے ہیں اور ع ف، ف د، د ع بالترتیب ب ج، ج ا، اب سے لا، ما، سے پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط لا، ما، سے ہم خط ہیں نیز ثابت کرو کہ ب د ج لا ایک موسیقی صف ہے۔

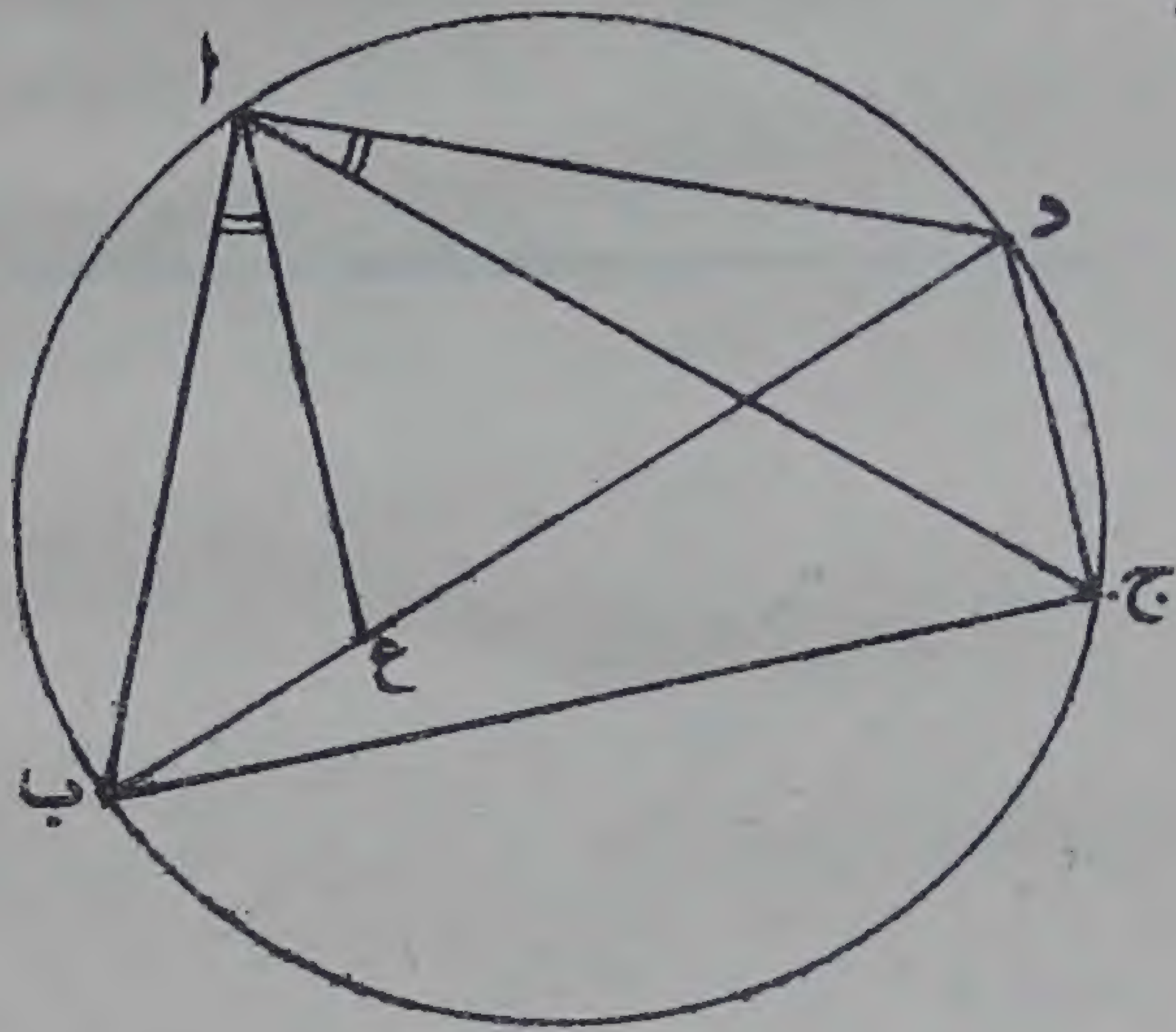
(۱۱) مثلث اب ج کے اندر کوئی نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ

جب و بْ ج × جب و جْ ا × جب و اْ ب = جب و جْ ب × جب و بْ ا × جب و اْ ج

اس نتیجہ کا عکس بیان کرو اور اُس کو بھی ثابت کرو۔

چوتھا باب

دائروں کے خواص

۷۴۔ مسئلہ۔ مشترک المحیط ذوار بعۃ الاضلاع (چارضلعی) کے وتروں کا حاصل ضرب مقابل کے اضلاع کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

ا ب ج د ایک مشترک المحیط ذوار بعۃ الاضلاع ہے، ثابت کرنا ہے کہ

اج × ب د = اب × ج د + اد × ب ج

ج اَ د کے مساوی ب اَ ع بناؤ۔

فرض کرو کہ اع، ب د سے ع پر ملتا ہے

مثلثات ب اع اور ج اد میں

ب ا̂ ع = ج ا̂ د

اور　اب̂ ع = اج̂ د

اس لیے مثلثات ب اع اور ج اد متشابہ ہیں۔

اس لیے　اب / اج = ب ع / ج د

یعنی　اب × ج د = اج × ب ع .... (۱)

نیز مثلثات ب اج اور ع اد میں

ب ا̂ ج = ع ا̂ د

اور　ب ج̂ ا = ع د̂ ا

اس لیے مثلثات ب اج اور ع اد متشابہ ہیں۔

اس لیے　ب ج / ع د = اج / اد

یعنی　اد × ب ج = اج × ع د .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے:

اب × ج د + اد × ب ج = اج × ب ع + اج × ع د

= اج (ب ع + ع د)

= اج × د ب

نوٹ۔ اس مسئلہ کو بطلیموس (Ptolemy) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۳

(۱) مثلث اب ج میں اب = اج، قاعدہ ب ج کے سروں ب اور ج سے خطوط ب د اور ج د کھینچے گئے ہیں جو بالترتیب ب ا اور ج ا

پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ

ب ج × ا د = ۲ ا ب × ب د

(۲) مثلث مساوی الاضلاع اب ج کے حائط دائرہ کی قوس صغیر ب ج پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ

ن ب + ن ج = ن ا

(۳) مثلث اب ج میں اب = اج، اس مثلث کے حائط دائرہ کی قوس ب ج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ن ب + ن ج) : ن ا ایک مستقل مقدار ہے۔ نیز بتاؤ کہ ن کے کس مقام کے جواب میں ن ب + ن ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہے۔

(۴) مربع اب ج د کے حائط دائرہ کی قوس صغیر اب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

(ن ا + ن ج) : (ن ب + ن د) = ن د : ن ج

(۵) منتظم مسدس اب ج د ع ف کے حائط دائرہ کی قوس صغیر اب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

ن ا + ن ب + ن ج + ن ف = ن د + ن ع

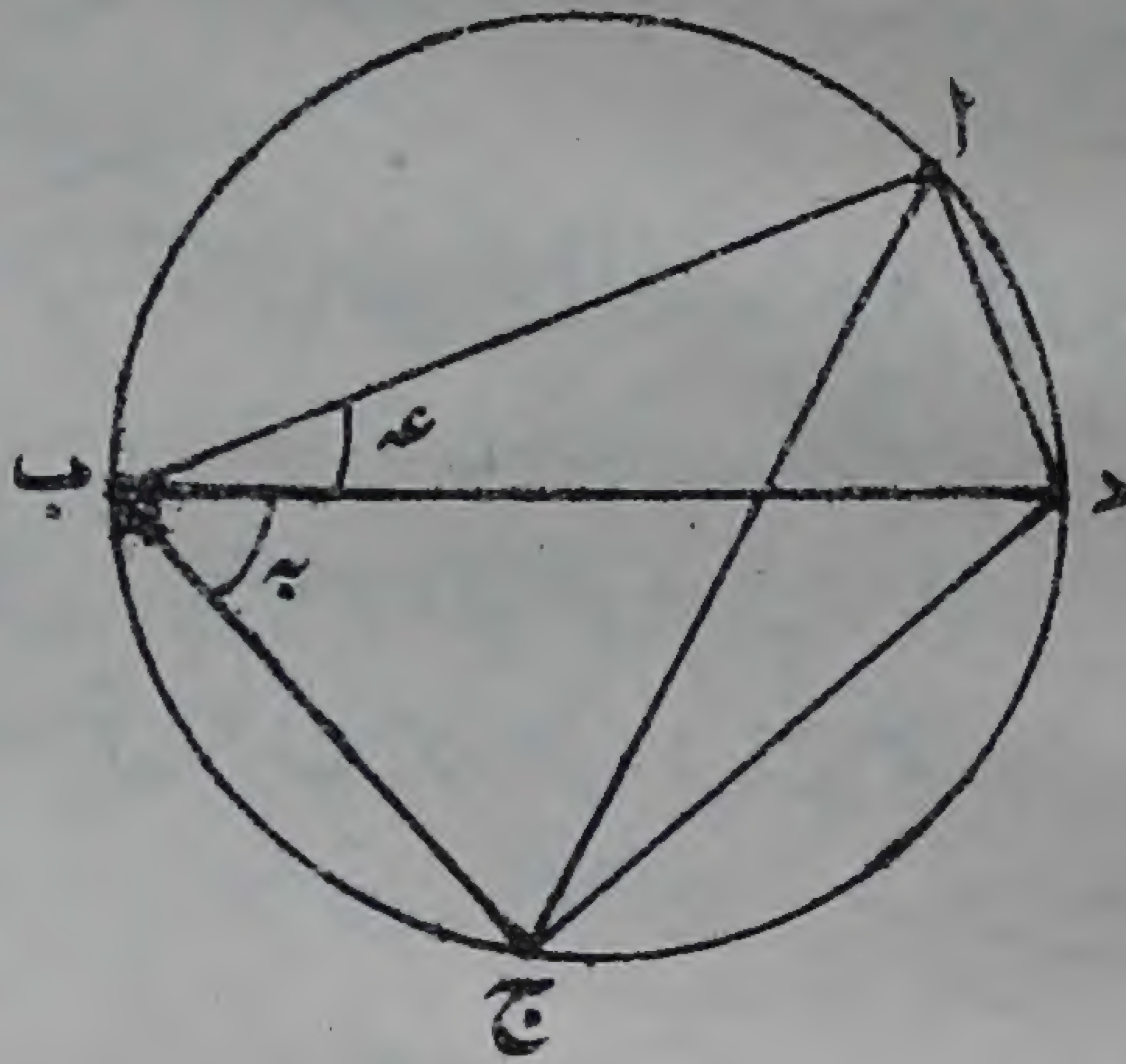
(۶) بطلیموس کے مسئلہ کی مدد سے زاویوں عہ اور بہ کی حادہ قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

جب (عہ + بہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ

اکائی طول کے خط ب د کے قطر پر ایک دائرہ بناؤ۔ ب د کی مخالف سمتوں میں زاویے د ب ا اور د ب ج بالترتیب عہ اور بہ کے مساوی بناؤ (دیکھو شکل صفحہ ۷۹)۔ ا ج کو ملاؤ۔

بطلیموس کے مسئلہ کی رو سے اب × ج د + ا د × ب ج = اج × ب د

یعنی جم عہ جب بہ + جب عہ جم بہ = اج (کیونکہ ب د = ۱)

لیکن مثلث اب ج میں $\frac{\text{ا ج}}{\text{جب (عہ + بہ)}}$ = مثلث کے حائط دائرہ کا قطر ب د = ۱

∴ اج = جب (عہ + بہ)

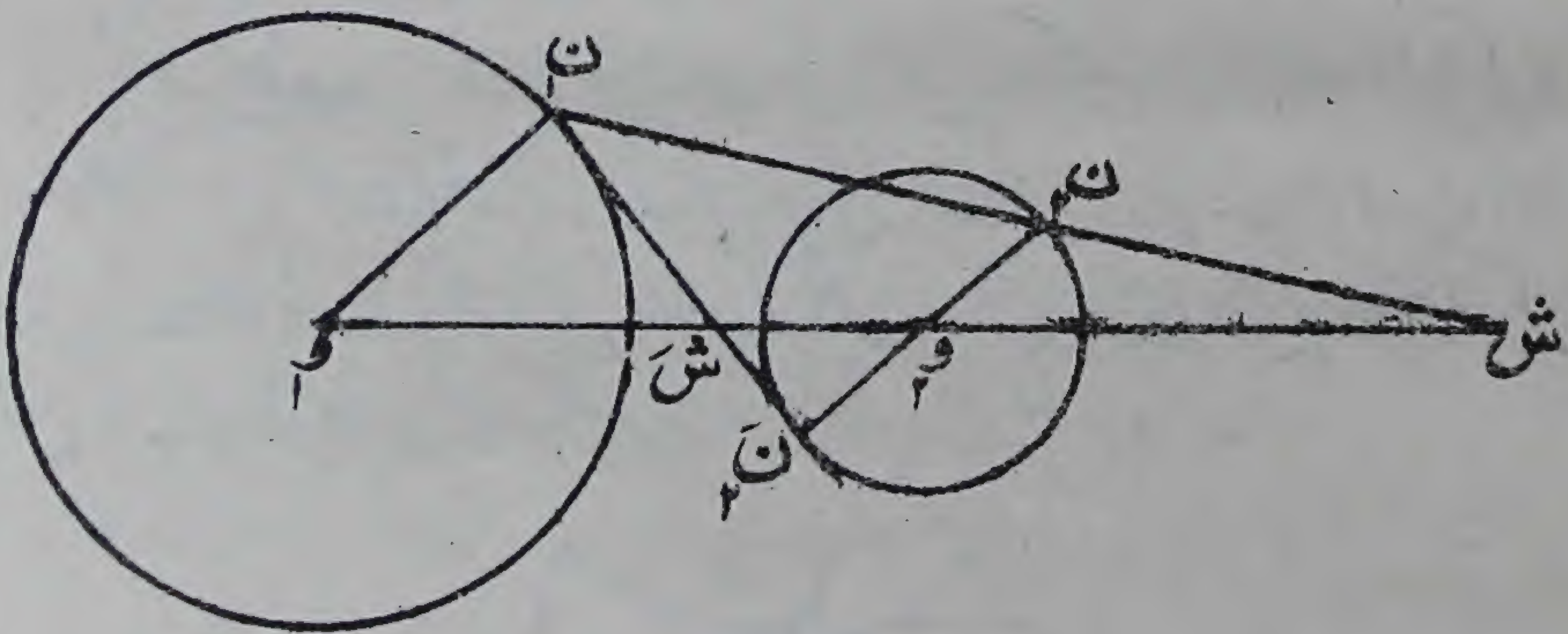
پس ثابت ہوا کہ جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ = جب (عہ + بہ)

(۷) مندرجۂ بالا سوال کے طریقہ سے مناسب شکلیں کھینچ کر ثابت کرو کہ

(ا) جب (عہ - بہ) = جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ

(ب) جم (عہ + بہ) = جم عہ جم بہ - جب عہ جب بہ

(ج) جم (عہ - بہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ

(۸۴) اگر دو دائروں میں کوئی دو متوازی نصف قطر (ہر دائرہ میں ایک) کھینچے جائیں تو ان کے سروں کو ملانے والا خطِ مستقیم مرکزوں کے خط کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی ایک نہ ایک پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ (و۱) اور (و۲) دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔

جن کے نصف قطر بالترتیب $ر_۱$ اور $ر_۲$ ہیں۔ اِن میں دو نصف قطر (۱) $و_۱ن_۱$ اور $و_۲ن_۲$ ایک ہی سمت میں متوازی اور (۲) $و_۱ن_۱$ اور $و_۲نَ_۲$ مخالف سمتوں میں متوازی کھینچے گئے ہیں۔

خطوط $ن_۱ن_۲$ اور $ن_۱نَ_۲$ مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کو بالترتیب نقاط ش اور شَ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ش اور شَ دو ثابت نقطے ہیں۔

حِصّہ اوّل۔ چونکہ $و_۱ن_۱ // و_۲ن_۲$

اس لیے مثلثات ش $و_۱ن_۱$ اور ش $و_۲ن_۲$ متشابہ ہیں۔

اس لیے $\frac{ش و_۱}{ش و_۲} = \frac{و_۱ن_۱}{و_۲ن_۲} = \frac{ر_۱}{ر_۲}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

یعنی مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کی خارجی تقسیم $ر_۱ : ر_۲$ کی نسبت میں نقطہ ش پر ہوتی ہے اس لیے ش ایک ثابت نقطہ ہے۔

حِصّہ دوم۔ چونکہ $و_۱ن_۱ // و_۲نَ_۲$

اس لیے مثلثات شَ $و_۱ن_۱$ اور شَ $و_۲نَ_۲$ متشابہ ہیں۔

اس لیے $\frac{شَ و_۱}{شَ و_۲} = \frac{و_۱ن_۱}{و_۲نَ_۲} = \frac{ر_۱}{ر_۲}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

یعنی مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کی داخلی تقسیم $ر_۱ : ر_۲$ کی نسبت میں نقطہ شَ پر ہوتی ہے۔ اس لیے شَ ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

تعریف۔ نقاط شَ اور ش، جن پر مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کی داخلی اور خارجی تقسیم نصف قطروں $ر_۱$ اور $ر_۲$ کی نسبت میں ہوئی ہے، دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔ ش سیدھی مشابہت کا مرکز ہے اور شَ آڑی مشابہت کا مرکز۔

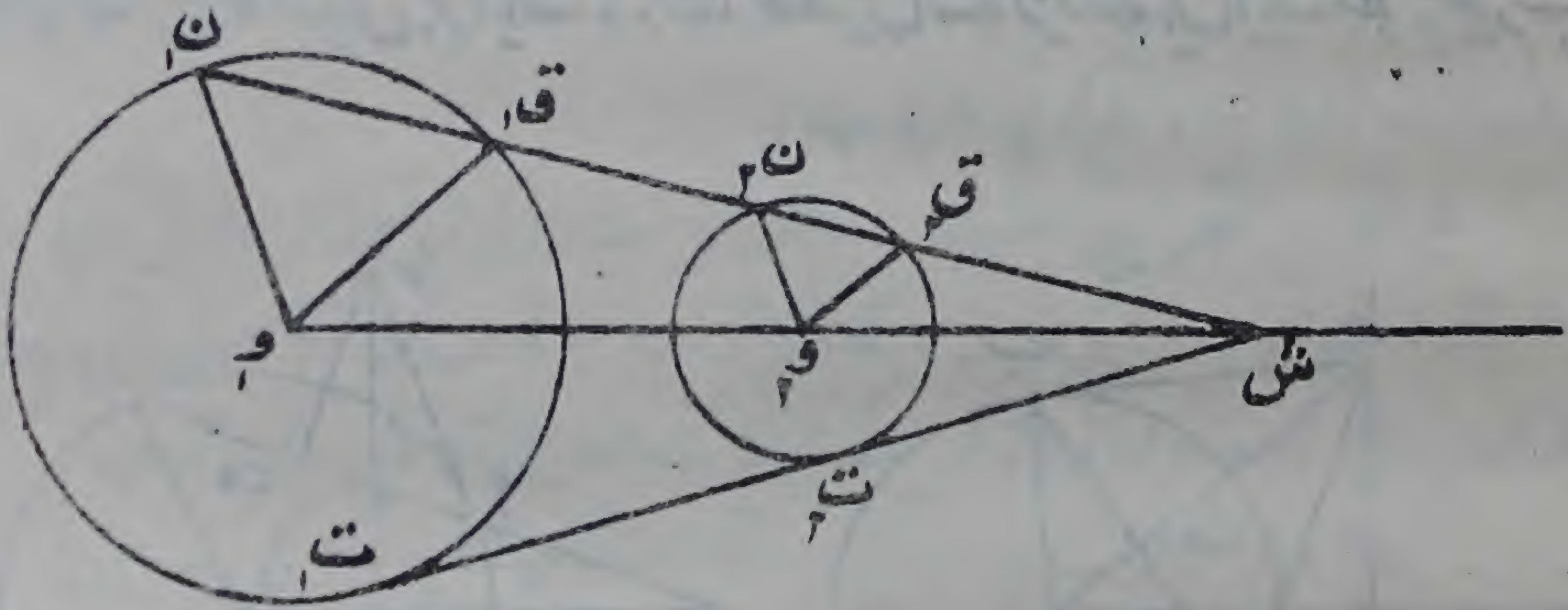
مسئلہ ۱۴

(۱) دائروں ($و_۱$) اور ($و_۲$) کے نصف قطر ہ ءً اور ہ ءً ہیں اور

و۱ و۲ = ۴″ اِن دائروں کی مشابہت کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ محسوب کرو۔
[جواب - ۳″]

(۲) ثابت کرو کہ دائروں (و۱) اور (و۲) کے راست مشترک مماسات کا نقطۂ تقاطع سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر اور متقاطع مشترک مماسات کا نقطۂ تقاطع آڑی مشابہت کے مرکز ش۱ پر ہے۔

(۳) ایک متغیر دائرہ (ج) دو دیے ہوئے دائروں (و۱) اور (و۲) کو نقاط ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ف ق دیے ہوئے دائروں کے ایک نہ ایک مشابہت کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۴) دو دیے ہوئے دائروں (و۱) اور (و۲) کی سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دائرہ (و۱) کو نقاط ن۱ اور ق۱ پر اور دائرہ (و۲) کو نقاط ن۲ اور ق۲ پر قطع کرتا ہے (دیکھو شکل)

ثابت کرو کہ و۱ ن۱ متوازی ہے و۲ ن۲ اور و۱ ق۱ متوازی ہے و۲ ق۲ کے۔

(۵) شکل بالا میں ثابت کرو کہ

ش ن۱ × ش ق۲ = ش ن۲ × ش ق۱ = ش ت۱ × ش ت۲

جہاں ت۱ اور ت۲ دیے ہوئے دائروں کے ایک راست مشترک مماس کے نقاطِ تماس ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط اور نو نقطی دائروں کی مشابہت کے

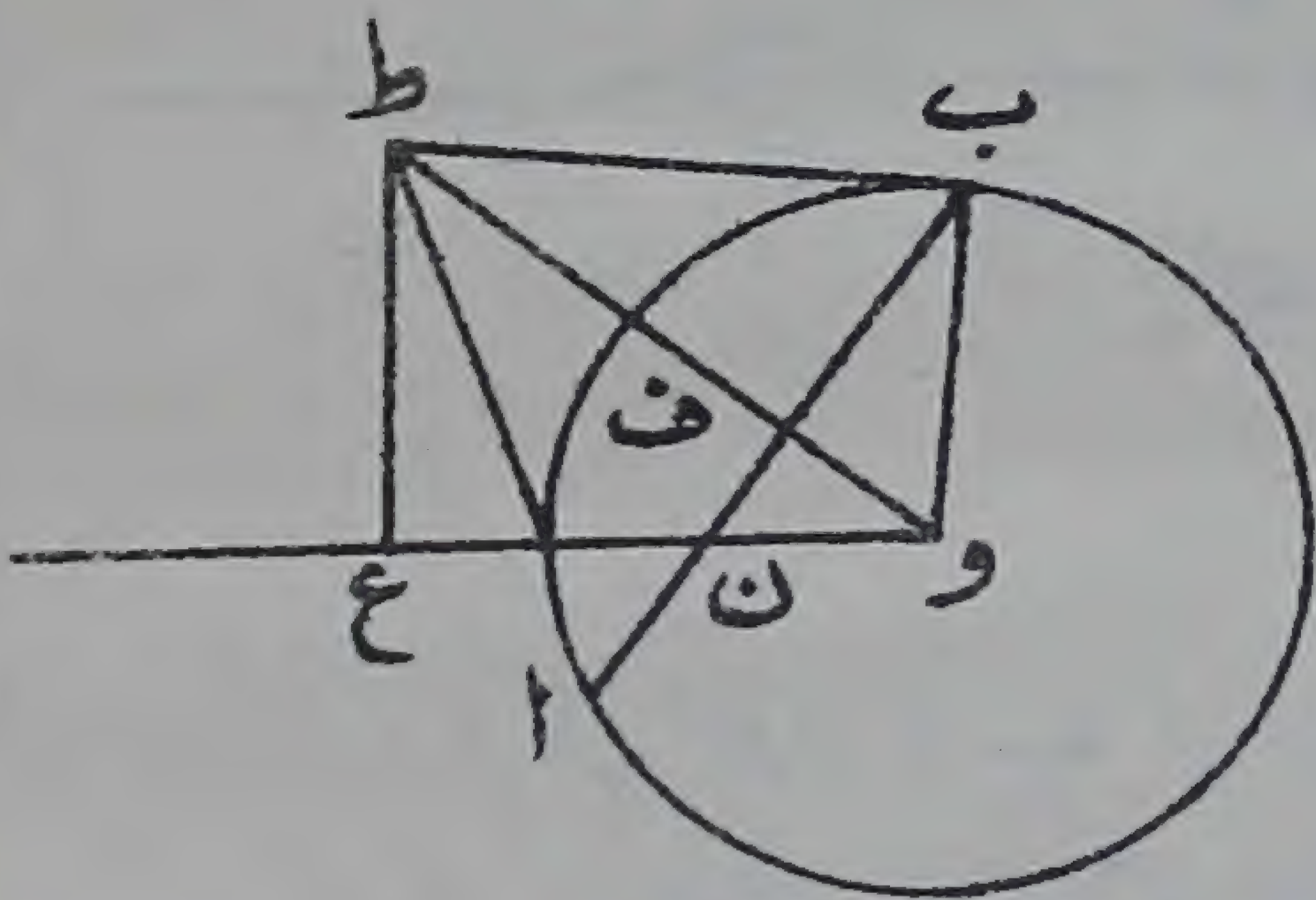
مرکز مثلث کے عمودی مرکز اور ہندسی مرکز ہیں۔

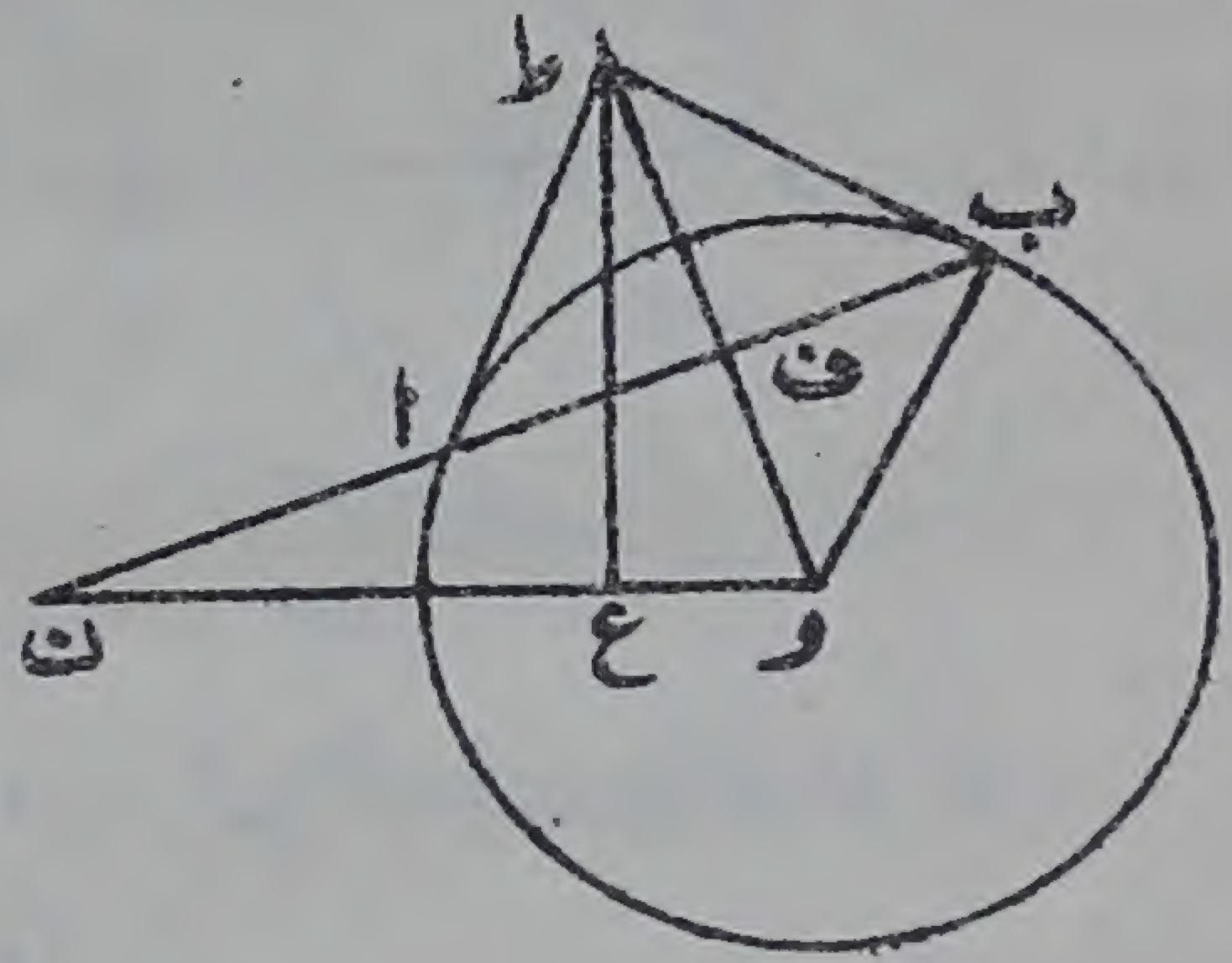
(۷) ثابت کرو کہ دو مساوی دائروں کی سیدھی مشابہت کا مرکز لاتناہی پر ہے۔

(۸) (و۱)، (و۲) اور (و۳) تین دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے مرکز ہم خط نہیں ہیں۔ دائروں (و۲) اور (و۳) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب ش۱ اور ش۱َ ہیں۔ اور دائروں (و۳) اور (و۱) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب ش۲ اور ش۲َ ہیں اور دائروں (و۱) اور (و۲) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب ش۳ اور ش۳َ ہیں۔ ثابت کرو کہ

(۱) و۱ش۱َ، و۲ش۲َ، اور و۳ش۳َ متراکز ہیں

(۲) چھ نقطوں ش۱، ش۱َ، ش۲، ش۲َ، ش۳، ش۳َ میں سے ایسے تین تین نقطوں کے چار جُٹ ہیں جو ہم خط ہیں۔

۴۹ ۔ ایک دائرے کے اُن وتروں کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں ایک خطِ مستقیم ہے۔

شکل ۱

شکل ۲

فرض کرو کہ دائرہ (و) کی سطح میں ایک ثابت نقطہ ن ہے۔ ن میں گزرنے والا کوئی خط دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر ملتا ہے اور ا اور ب پر کے

مماسات کا نقطۂ تقاطع ط ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ ط کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

و ن کو ملاؤ اور ط سے و ن پر عمود ط ع نکالو

فرض کرو کہ و ط اور ا ب کا نقطۂ تقاطع ف ہے،

و ب کو ملاؤ۔

چونکہ ف اور ع پر کے زاویے قائمے ہیں

اس لیے نقاط ف، ع، ن، ط مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے و ن × و ع = و ط × و ف = و ب² جو ایک مستقل مقدار ہے۔

اب چونکہ و اور ن ثابت نقطے ہیں اس لیے ع بھی ایک ثابت نقطہ ہے اور نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی وتر ا ب کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہے جو ثابت نقطہ ع میں سے گزرتا ہے اور و ن پر عمود وار ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

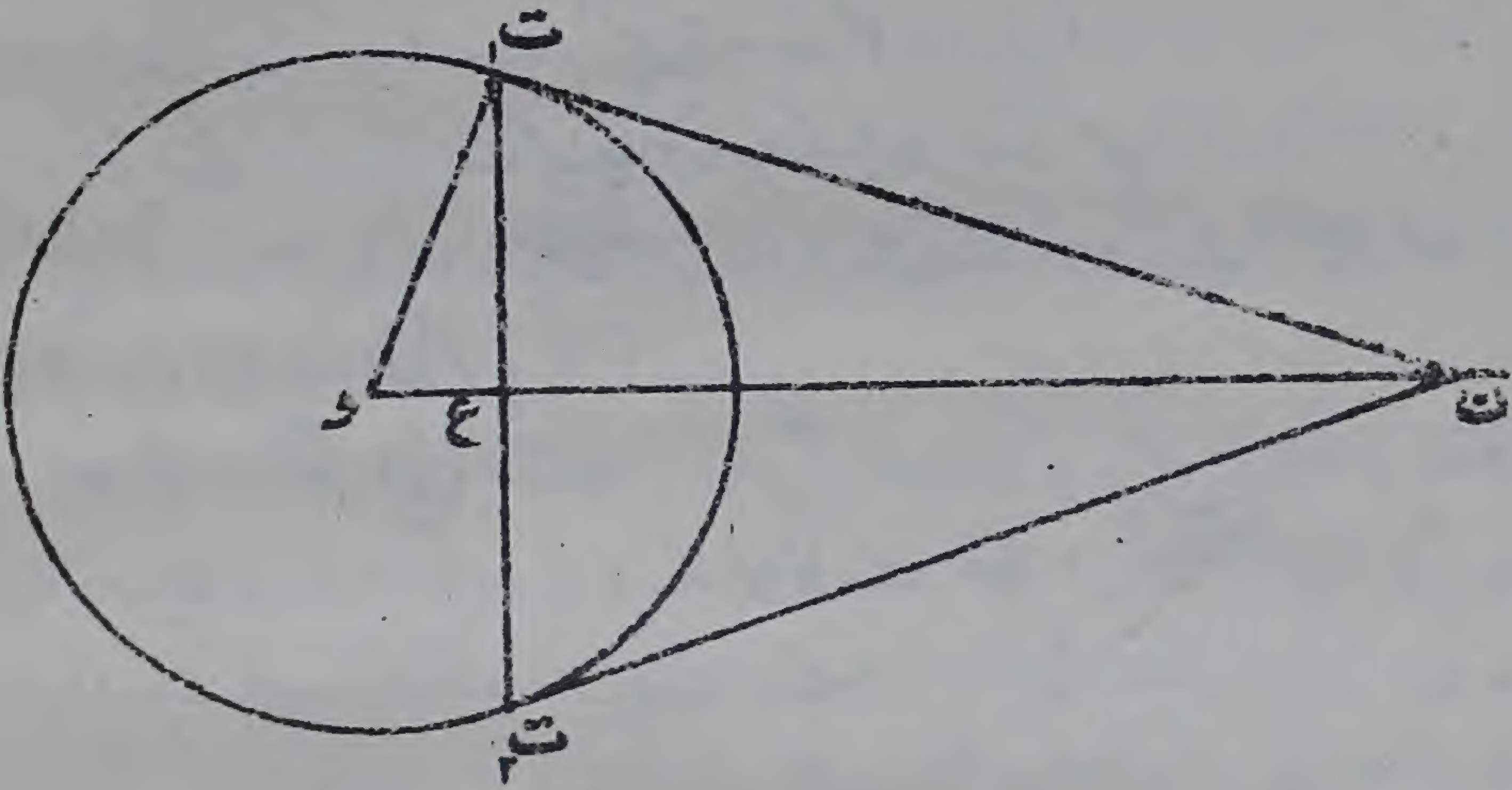
نوٹ:۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ع ط پر کے کسی نقطہ سے دائرہ (و) تک کھینچے ہوئے مماسوں کا وترِ تماس نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔ پس خط ع ط طریق کے دونوں شرائط کو پورا کرتا ہے۔

۵۰۔ تعریفات۔ دفعہ گزشتہ کی ترتیم کے مطابق نقطۂ ط کا طریق دیے ہوئے دائرہ (و) کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہلاتا ہے اور نقطۂ ن دیے ہوئے دائرہ (و) کے لحاظ سے خط ع ط کا قطب کہلاتا ہے۔

اگر دائرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر مرکز کی ایک ہی جانب نقاط ن اور ن' اس طرح لیے جائیں کہ و ن × و ن' = ر² جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے تو نقاط ن، ن' میں سے ہر ایک بلحاظ دائرہ (و) کے دوسرے نقطہ کا مقلوب کہلاتا ہے۔ مثلاً دفعہ گزشتہ کی شکل میں نقاط ن اور ع بلحاظ دائرہ (و) کے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں، پس حاصل ہوا کہ بلحاظِ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی ایک خطِ مستقیم ہے جو ن کے مقلوب میں سے گزرتا ہے اور و ن پر عمود وار ہے۔

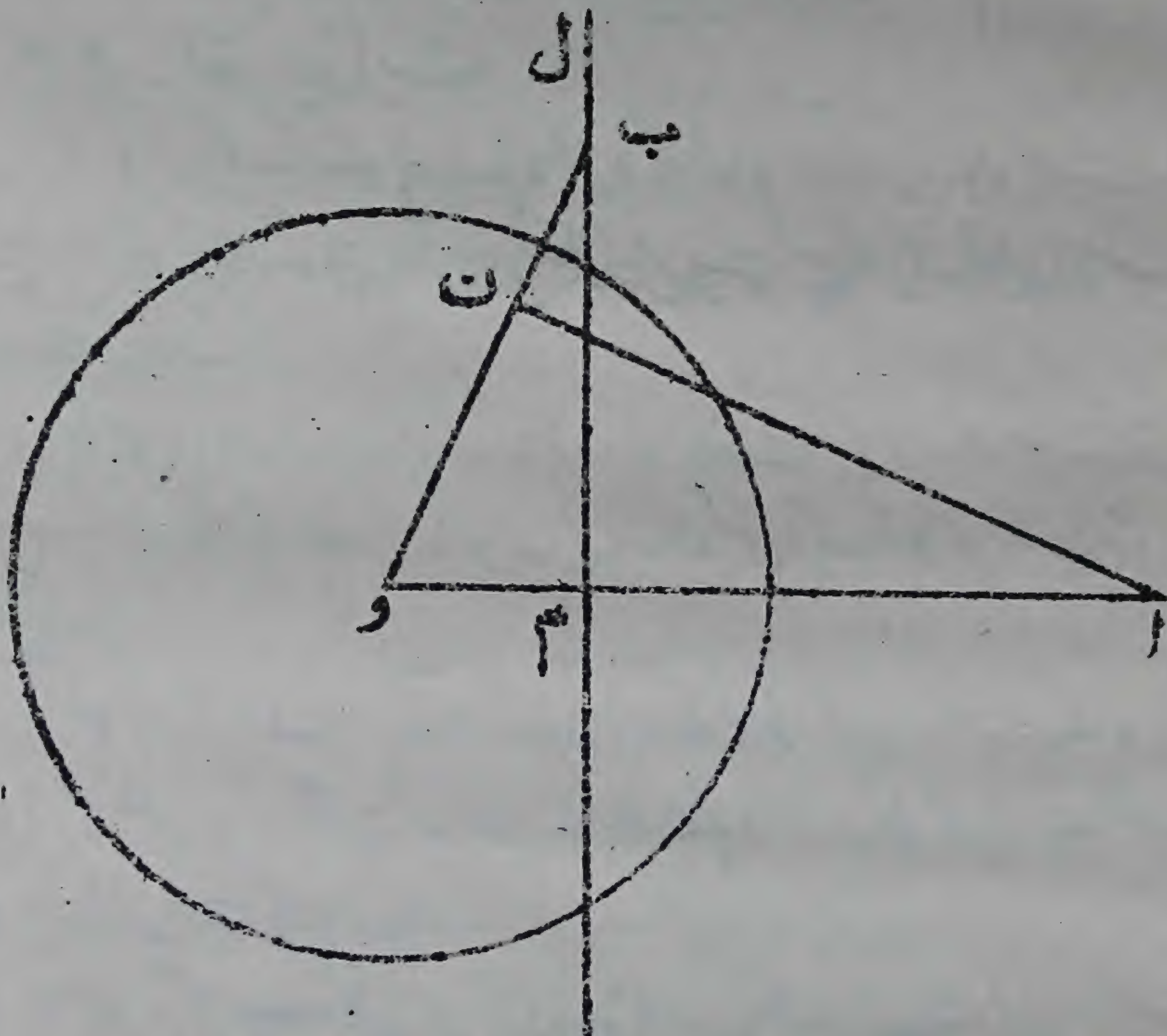
۵۱۔ چونکہ و ن × و ن' = ر² جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے،

اس لیے وع بڑا ہے، مساوی ہے، چھوٹا ہے ون سے بہ ترتیب بہ سبب اس کے کہ ون چھوٹا ہے یا مساوی ہے یا بڑا ہے نصف قطر سے
پس حاصل ہوا کہ بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے یا مس کرتا ہے، یا قطع کرتا ہے بہ سبب اس کے کہ نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے دائرہ پر ہے، یا دائرہ کے باہر ہے۔

۵۲ ۔ مسئلہ ۔ اگر نقطہ ن دائرہ (و) کے باہر ہو تو ن کا قطبی اُن مماسات کا وترِ تماس ہے جو ن سے دائرہ (و) تک کھینچے جائیں۔

نقطہ ن سے دائرہ (و) کے مماسات ن ت۱، ن ت۲ کھینچو۔

فرض کرو کہ وترِ تماس ت۱ ت۲ خط و ن سے ع پر ملتا ہے۔
چونکہ مثلث و ن ت۱ قائم الزاویہ ہے اور ت۱ ع عمود ہے وتر و ن پر
اس لیے و ن . و ع = و ت۱²
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ن اور ع ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔
نیز وترِ تماس ت۱ ت۲ نقطہ ن کے معکوس ع میں سے گزرتا ہے

اور و ن ان پر عمود ہوا ہے -
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی وتر تماس ا ت ہے -

۳۵ - مسئلہ - اگر بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ا کا قطبی نقطہ ب میں سے گزرے تو ب کا قطبی ا میں سے گزریگا -

فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ا کا قطبی خط ل م ہے
حسب مفروض خط ل م نقطہ ب میں سے گزرتا ہے
فرض کرو کہ و ا اور ل م کا نقطہ تقاطع م ہے
و ب کو ملاؤ اور ا سے و ب پر عمود ا ن نکالو -
چونکہ م اور ن پر کے زاویے قائمہ زاویے ہیں
اس لیے و ن × و ب = و م × و ا = ر^۲ جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے -
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے ب کا قطبی ن ہے
نیز ن ا عمود ہے و ب پر

اس لیے ب کا قطبی ن ا ہے اور یہ خط نقطۂ ا میں سے گزرتا ہے
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی تشکافی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔
مندرجۂ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے دو خطوط میں سے
ایک کا قطب دوسرے پر ہو تو دوسرے کا قطب پہلے پر ہوگا۔

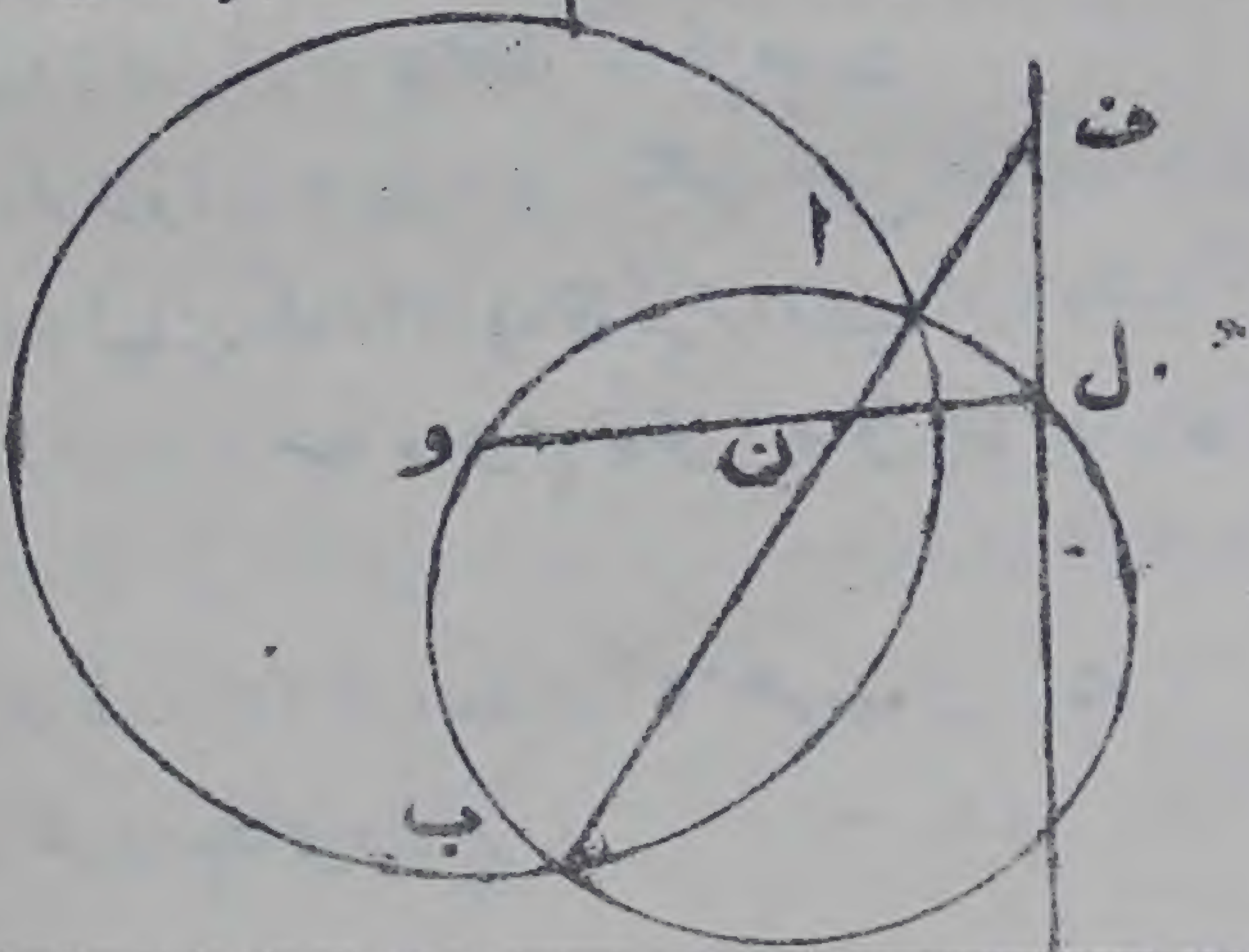
۵۴ - تعریفات۔

(۱) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے نقطے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں اگر ان نقطوں میں سے کسی کا ایک قطبی دوسرے نقطہ میں سے گزرے۔

(۲) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے خطوط مزدوج خطوط کہلاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک خط کا قطب دوسرے خط پر واقع ہو۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک مثلث کے ہر راُس کا قطبی مقابل کا ضلع ہو تو مثلث مذکور دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے مثلث مزدوج بالذات کہلاتا ہے۔

* **۵۵ - مسئلہ** - اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر اور نقطۂ ن کے قطبی سے ف پر ملے تو اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پہ ہوتی ہے۔

ف
ا
ل
و
ن
ب

صورت اوّل - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے۔
فرض کرو کہ و ن، ن کے قطبی سے ل پر ملتا ہے۔

تب و ن × ن ل = و ن (و ل - و ن) = و ن × و ل - و ن^۲
= و ا^۲ - و ن^۲ (کیونکہ و ن × و ل = و ا^۲)

نیز ب ن × ن ا = و ا^۲ - و ن^۲

اس لیے و ن × ن ل = ب ن × ن ا

یعنی نقاط و، ب، ل، ا مشترک المحیط ہیں۔

نقاط و، ب، ل، ا میں سے گزرنے والا دائرہ کھینچو۔

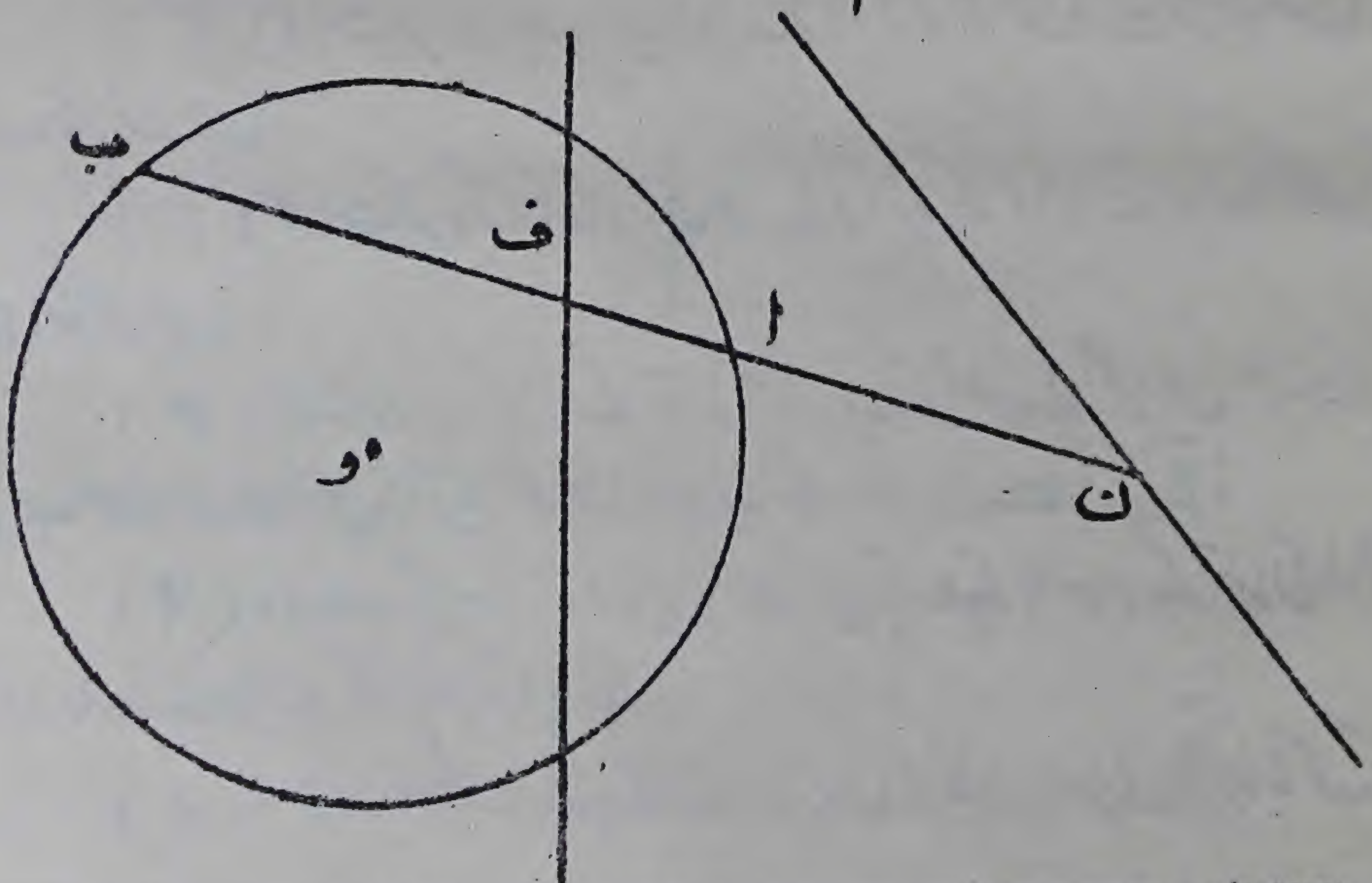
اس دائرہ کا وتر و ب = وتر و ا کیونکہ ہر ایک وتر دائرہ (و) کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے و ا اور و ب کے محاذی ل پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

یعنی ل ن اندرونی مُنصّف ہے ب لؔ ا کا

نیز چونکہ ن لؔ ف قائمہ ہے

اس لیے ل ف خارجی ناصف ہے ب لؔ ا کا

اس لیے ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

صورت دوم - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے باہر ہے۔

چونکہ ن کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے اس لیے ف کا قطبی ن میں سے گزریگا۔ اس لیے صورت اوّل کی رُو سے ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ:۔ اس مسئلہ کو "قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت" سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس دفعہ کے مسئلہ کا عکس حسبِ ذیل ہے:۔

اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر ملے اور ا ب پر ایک نقطہ ف ایسا لیا جائے کہ ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہو تو ف کا طریق ن کا قطبی ہوگا۔

اس کا ثبوت طالبِ علم مشق کے طور پر خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ دو نقطوں کو ملانے والا خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے اُن نقطوں کے قطبیوں کے نقطۂ تقاطع کا قطبی ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع ایک دائرہ کے لحاظ سے اُن خطوط کے قطبوں کو ملانے والے خط کا قطب ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے متراکز خطوط کے قطب ہم خط ہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ہم خط نقطوں کے قطبی متراکز ہیں۔

(۵) بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ا اور ب کے قطبی لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا و ب مساوی ہے اُس زاویہ کے جو ا اور ب کے قطبیوں سے بنتا ہے۔

(۶) دو ہم مرکز دائروں میں سے کسی ایک کے مماسوں کے قطبوں کا طریق بلحاظ دوسرے دائرہ کے معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مساوی وتروں کے قطبوں کا طریق دائرۂ مذکورہ کے

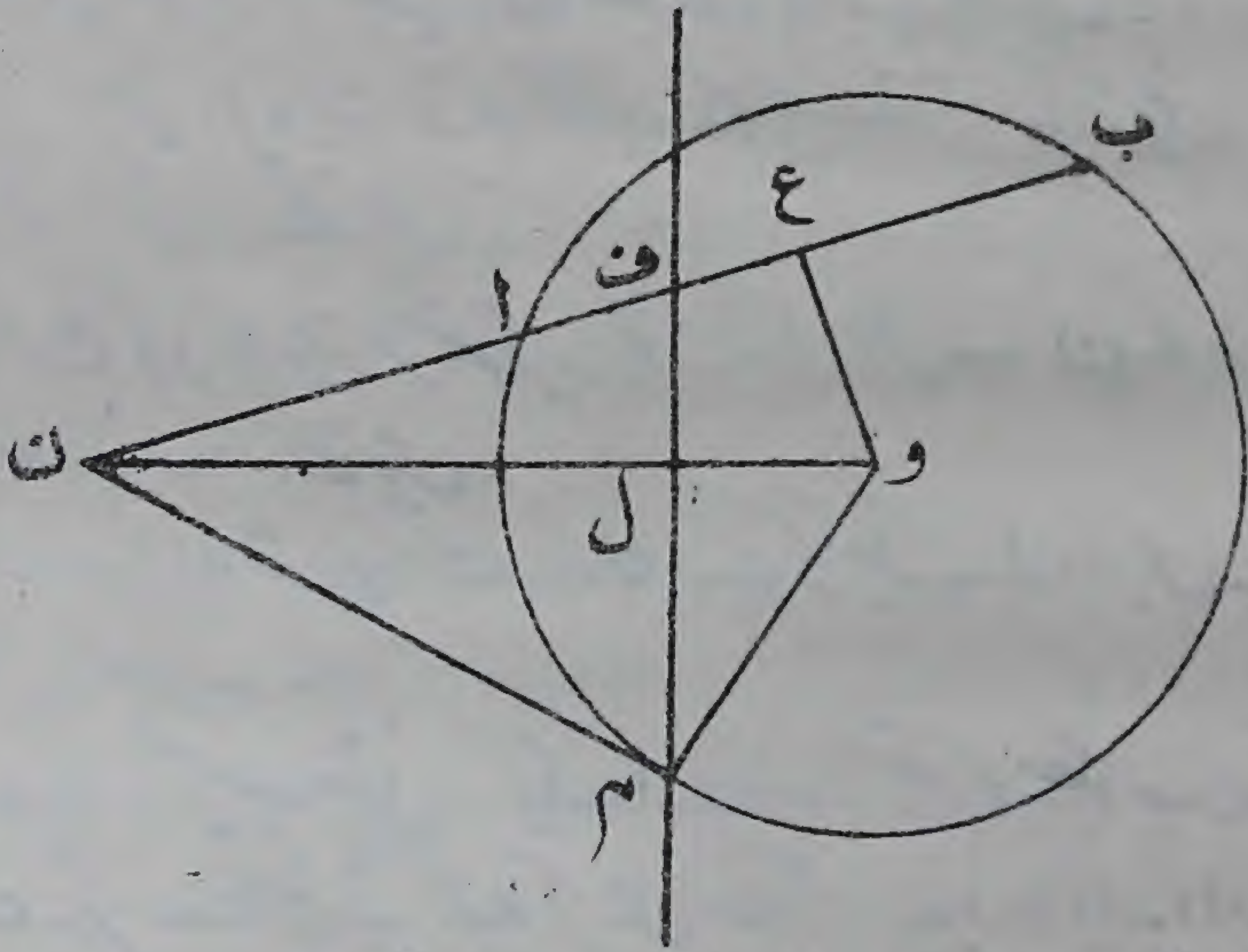
لحاظ سے ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

(۸) دائرہ (و) کے لحاظ سے ا اور ب مزدوج نقطے ہیں اور خط اب کا قطب ج ہے ثابت کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے مثلث ا ب ج مزدوج بالذات ہے۔

(۹) اگر ایک مثلث بلحاظ ایک دائرہ کے مزدوج بالذات ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز دائرہ کے مرکز پر ہوگا۔

(۱۰) اگر دائرہ (و) کے لحاظ سے نقاط ا اور ب کے قطبی لیے جائیں اور ا سے ب کے قطبی پر عمود ال اور ب سے ا کے قطبی پر عمود ب م نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ و ا : و ب = ال : ب م

[اس نتیجہ کو سامن (Salmon) کا مسئلہ کہتے ہیں]

(۱۱) اگر ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو دائرہ (و) سے ا اور ب پر اور ن کے قطبی سے ف پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ا اور ن ب کا موسیقی اوسط ن ف ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ن کا قطبی خط و ن سے ل پر اور دائرہ (و) سے م پر ملتا ہے۔

ن م اور و م کو ملاؤ اور و سے ا ب پر عمود و ع نکالو۔

چونکہ ن م دائرہ (و) کا مماس ہے،

اس لیے ن ا × ن ب = ن م^۲ = ن ل × ن و (کیونکہ ن لَ م قائمہ ہے)
= ن ف × ن ع (کیونکہ نقاط و، ع، ف، لَ مشترک المحیط ہیں)

اس لیے　۲ ن ا × ن ب = ن ف × ۲ ن ع
= ن ف (ن ا + ن ب) (کیونکہ ا ب کا وسطی نقطہ ع ہے)

اس لیے ن ف = $\frac{\text{۲ ن ا × ن ب}}{\text{ن ا + ن ب}}$

یعنی ن ف موسیقی اوسط ہے ن ا اور ن ب کا۔

* ۵۶۔ **تقلیب**۔ دفعہ ۵۰ کی تعریف کی مدد سے ہم ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے جس کا نصف قطر ر ہو ایک دیے ہوئے نقطہ ن کا مقلوب نقطہ نَ معلوم کر سکتے ہیں۔ دائرہ کے مرکز و کو تقلیب کا مرکز اور نصف قطر ر کو تقلیب کا نصف قطر کہتے ہیں۔

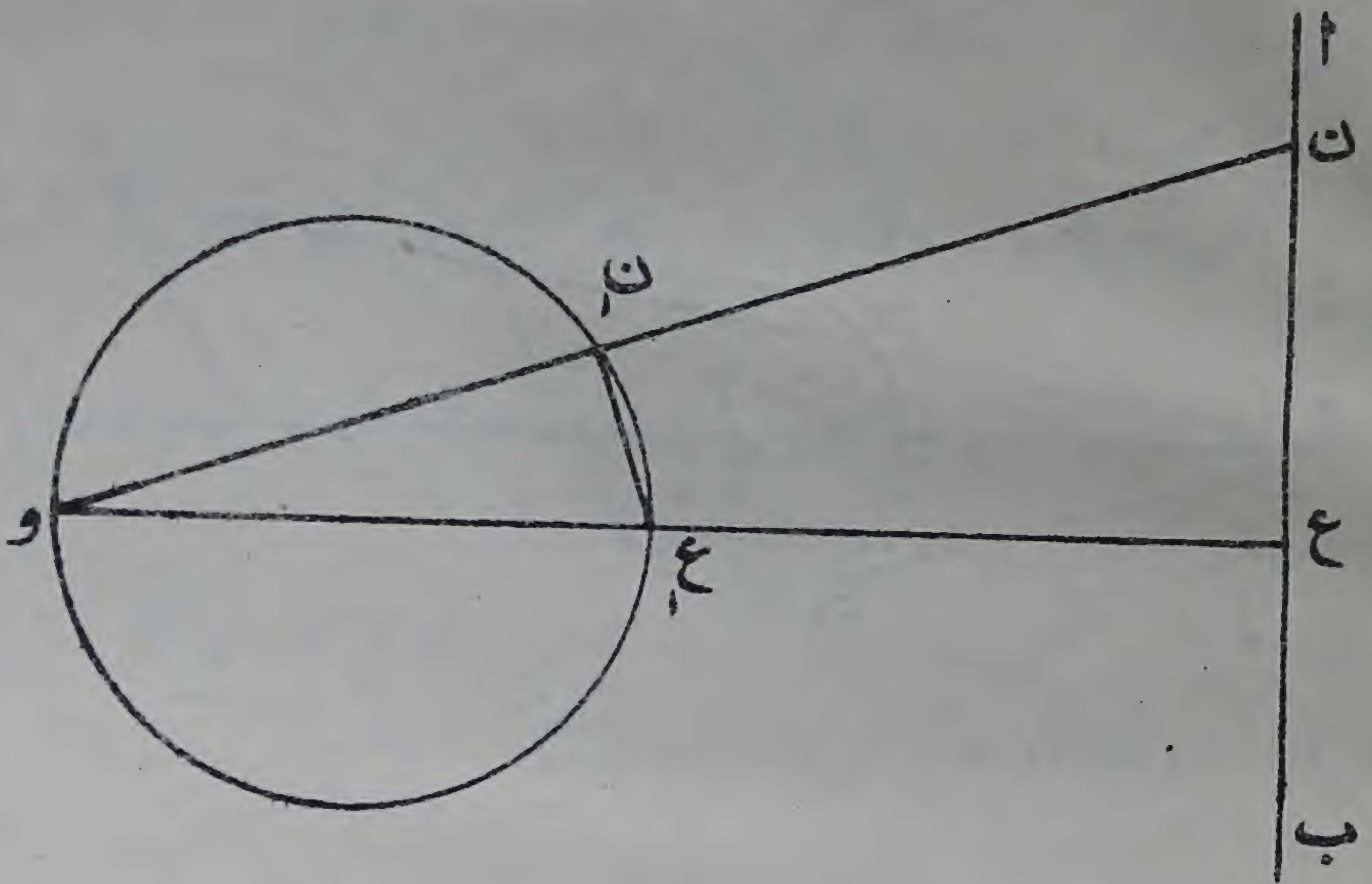
نیز بعض اوقات ر^۲ کو تقلیب کا مستقل کہتے ہیں۔ اور دائرہ کو تقلیب کا دائرہ کہتے ہیں۔

اگر ن کوئی طریق مرتسم کرے تو ن کے مقلوب نَ کے طریق کو ن کے طریق کا مقلوب کہتے ہیں۔

مندرجۂ بالا تعریفات سے ظاہر ہے کہ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ہر خط اپنا آپ مقلوب ہے۔

* ۵۷۔ **مسئلہ**۔ ایک ایسے خطِ مستقیم کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے نہ گزرے تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہوگا۔

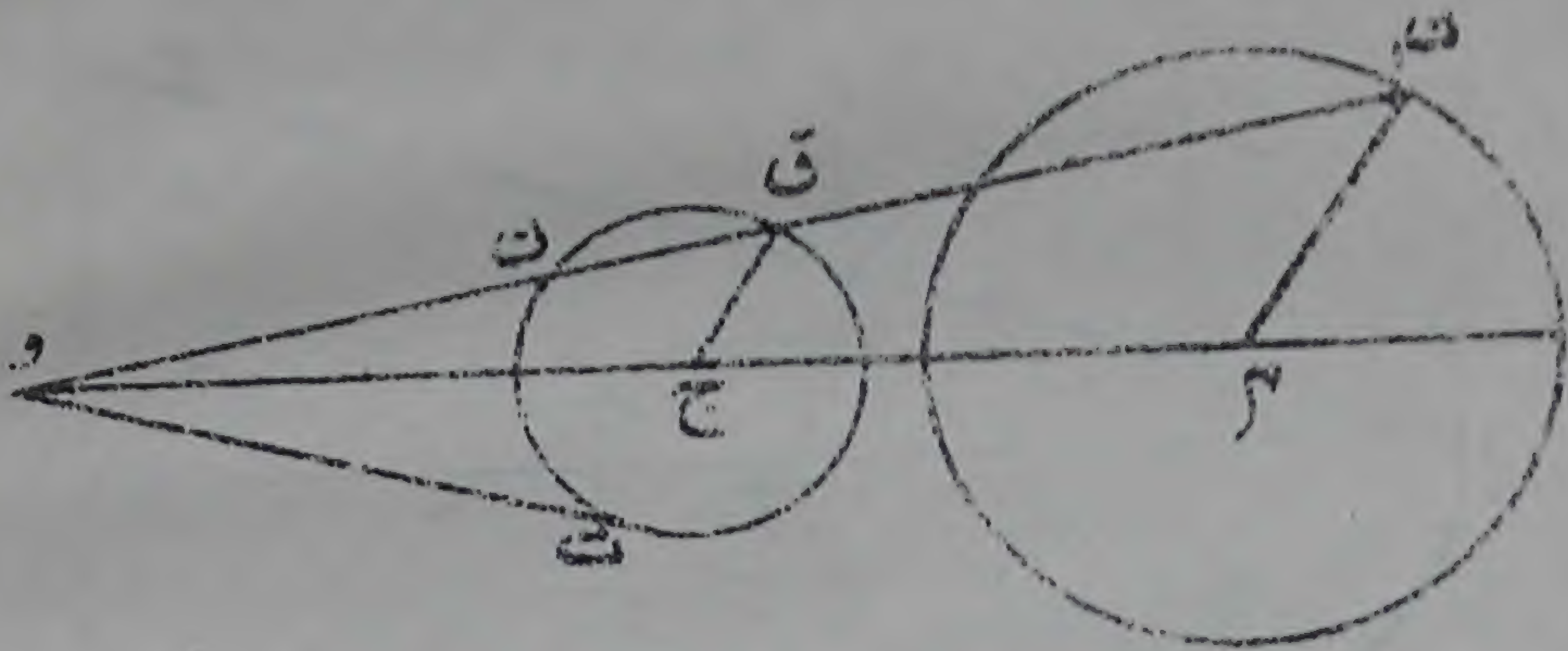
فرض کرو کہ دیا ہوا خطِ مستقیم ا ب ہے اور تقلیب کا مرکز و اور تقلیب کا نصف قطر ر ہے۔

و سے ا ب پر عمود و ع نکالو اور ع کا مقلوب عَ معلوم کرو۔
نیز ا ب پر کے کسی نقطہ ن کا مقلوب نَ معلوم کرو۔

بموجب تعریف و ع × و ع۱ = ر²
اور و ن × و ن۱ = ر²

∴ و ع × و ع۱ = و ن × و ن۱
∴ نقاط ق، ع، ع۱، ن مشترک المحیط ہیں۔
∴ و ن̂ ع۱ = و ع̂۱ ن = قائمہ زاویہ
اس لیے و ع۱ کے محاذی ن۱ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے
اس لیے ن۱ کا طریق یعنی خطِ مستقیم ا ب کا مقلوب و ع۱ قطر پر کا دائرہ ہے۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا کی شکل میں نقاط ن اور ن۱ ایک دوسرے کے مقلوب ہیں اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ایسے دائرہ کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے گزرتا ہے ایک خطِ مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائرہ کے اس قطر پر جو تقلیب کے مرکز میں سے گزرتا ہے عمود وار ہے اور تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔

*۵۸۔ ایک ایسے دائرہ کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز و اور تقلیب کا مستقل ر² ہے۔ نیز فرض کرو کہ دیے ہوئے دائرہ (ج) پر کے کسی نقطہ کا مقلوب ن۱ ہے۔

تقلیب کے مرکز و سے دائرہ (ج) کا ایک مماس و ت کھینچو فرض کرو کہ
طول و ت = م

نیز فرض کرو کہ خط و ن دائرہ (ج) سے مکرر نقطہ ق پر ملتا ہے۔
ق ج کو ملاؤ اور ن۱ م متوازی ق ج کے کھینچو جو و ج سے م پر ملے۔

$$\text{چونکہ} \quad \text{و ن} \times \text{و ن}_1 = \text{ر}^2$$

$$\text{اور} \quad \text{و ن} \times \text{و ق} = \text{م}^2$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{و ن}_1}{\text{و ق}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{م}^2} \quad \text{جو ایک مستقل مقدار ہے}$$

نیز متشابہ مثلثات و م ن۱ اور و ج ق سے

$$\frac{\text{و م}}{\text{و ج}} = \frac{\text{م ن}_1}{\text{ج ق}} = \frac{\text{و ن}_1}{\text{و ق}} \quad \text{جو ایک مستقل مقدار ہے}$$

اس لیے م ایک ثابت نقطہ ہے اور م ن۱ کا طول مستقل ہے۔
پس ثابت ہوا کہ ن۱ کا طریق یعنی دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مقلوب
بلحاظ مرکز و کے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز م ہے۔

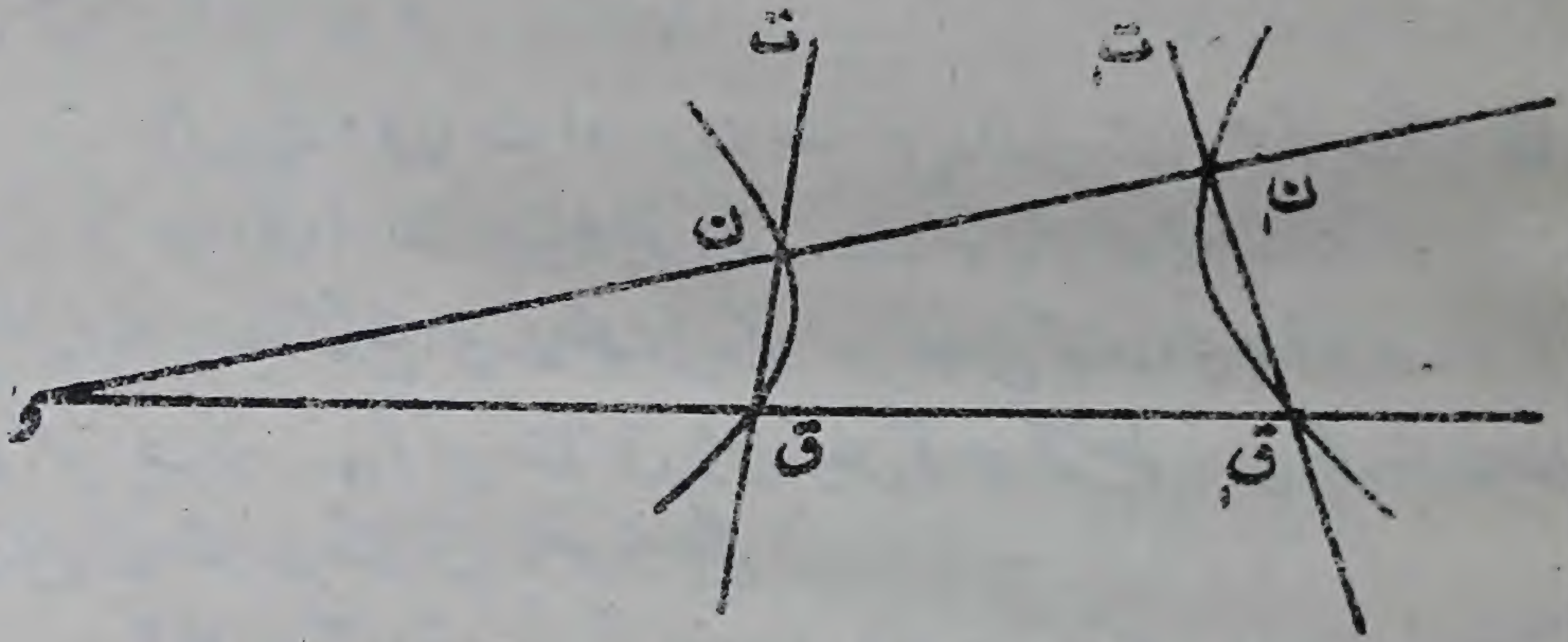
* ۹۵۔ تعریفات۔

(۱) اگر ایک منحنی پر دو نقطے ن اور ق ہوں تو وتر ن ق کا

انتہائی مقام جب کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے انتہا قریب آجاتا ہے منحنی کے نقطہ ن پر کا مماس کہلاتا ہے۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم کے کسی نقطہ پر کا مماس خود وہی خطِ مستقیم ہے۔

(۲) دو متقاطع منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ منحنیوں کا زاویۂ تقاطع کہلاتا ہے۔

* ۶۰۔ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا کوئی خطِ مستقیم ایک منحنی اور اس کے مقلوب کو مکمل زاویوں پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز و اور نصف قطر ل ہے۔
منحنی پر دو نقطے ن اور ق ایک دوسرے کے قریب ہیں اور ان کے مقلوب ن' اور ق' ہیں جو لازماً ایک دوسرے کے قریب واقع ہونگے۔

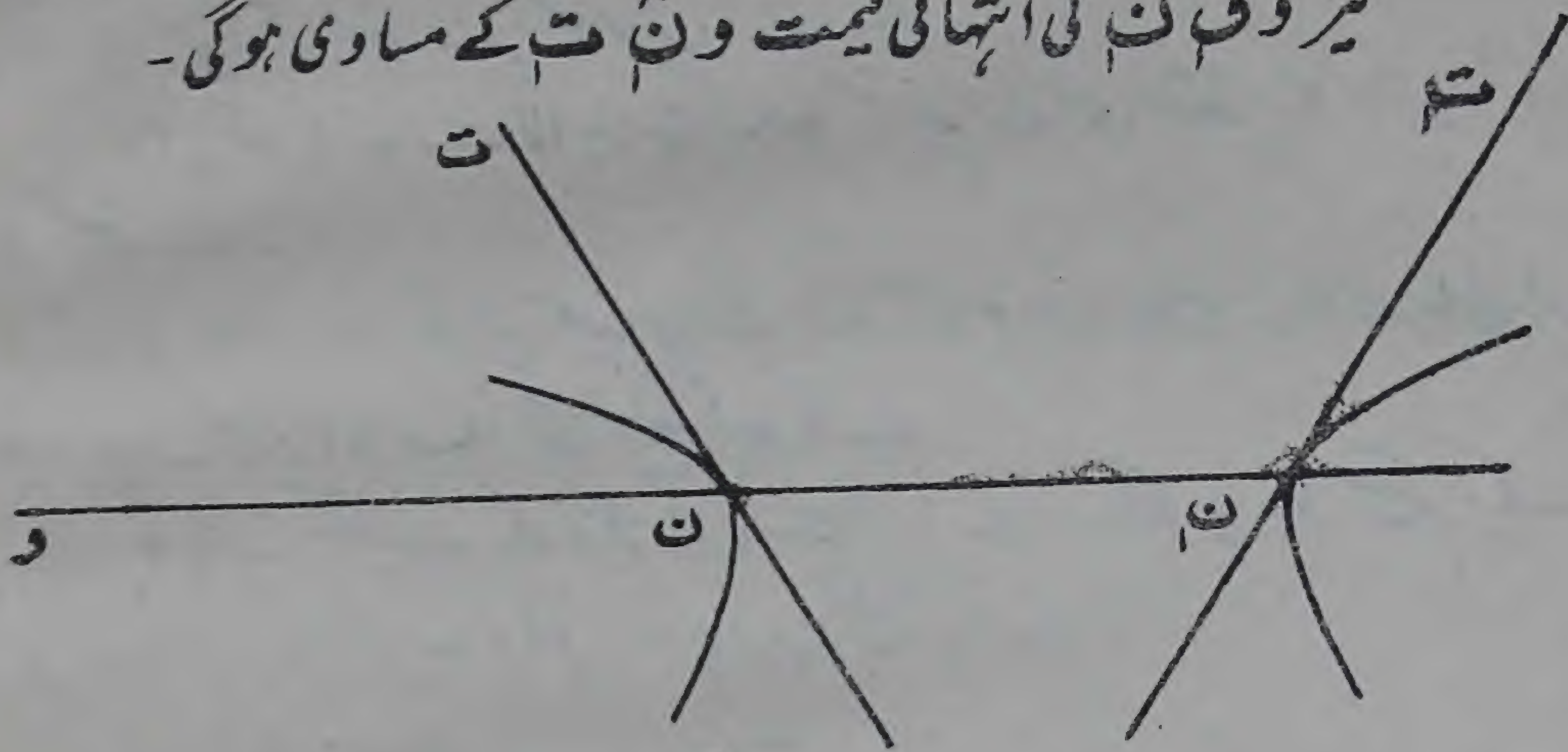
ق ن کو ت تک اور ق' ن' کو ت' تک خارج کرو۔

و ن × و ن' = و ق × و ق' کیونکہ ہر ایک مقدار تقلیب کے مستقل ل² کے مساوی ہے۔

اس لیے ن، ن'، ق'، ق مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے زاویے و ن ت اور و ق' ن' مکمل زاویے ہیں۔

اب جوں جوں نقطہ ق نقطہ ن کے قریب آتا جاتا ہے ویسے ہی نقطہ ق' بھی ن' کے قریب آئیگا اور انتہائی حالت میں خطوط ق ن ت اور ق' ن' ت' بالترتیب

نقاط ن اور نٖ پر منحنیوں کے مماسات ن ت اور نٖ تٖ بن جائینگے۔
نیز و ق نٖ کی انتہائی قیمت و نٖ تٖ کے مساوی ہوگی۔

اِس لیے و ن ت اور و نٖ تٖ مکمل زاویے ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ:۔ مندرجۂ بالا نتیجہ کی مدد سے بہ آسانی ثابت ہوسکتا ہے کہ دو متقاطع منحنیوں کا زاویۂ تقاطع ان کے مقلوبوں کے زاویۂ تقاطع کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز اگر دو منحنی ایک دوسرے کو کسی نقطۂ ق پر مَس کریں تو ان کے مقلوب بھی ایک دوسرے کو ق کے مقلوب نقطہ قٖ پر مَس کرینگے۔

۶۱۔ **تعریف**۔ اگر دو دائروں کا زاویۂ تقاطع زاویۂ قائمہ ہو تو یہ دائرے علی القوائم دائرے کہلاتے ہیں۔ یا یوں کہا جاتا ہے کہ یہ دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں تو کسی ایک نقطۂ تقاطع پر ہر دائرہ کا مماس دوسرے دائرہ کے مرکز میں سے گزریگا۔

مندرجۂ بالا نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے " دو علی القوائم دائروں کے کسی ایک نقطۂ تقاطع تک کھینچے ہوئے نصف قطر ایک دوسرے پر علی القوائم ہوتے ہیں اور دائروں کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع اُن کے نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے "

امثلہ ۱۶

(۱) اگر تقلیب کے مرکز و میں سے گزرنے والے ایک خطِ مستقیم پر کے تین نقطوں ن، ق، ط کے مقلوب نَ، قَ، طَ ہوں تو ثابت کرو کہ (و) اگر و ن، و ق، و ط سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو و نَ، و قَ، و طَ سلسلۂ موسیقیہ میں ہونگے۔ (ب) و ن، و ق، و ط سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں تو و نَ، و قَ، و طَ سلسلۂ ہندسیہ میں ہونگے۔

(۲) ایک خطِ مستقیم ایک دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تقلیب کے مرکز اور نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا خط دیے ہوئے دائرہ میں منقلب کیا جا سکتا ہے۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے باہر کے کسی نقطہ پر تقلیب کا مرکز لیا جائے تو ثابت کرو کہ تقلیب کے نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا دائرہ، اپنے آپ میں منقلب ہو سکتا ہے۔

(۴) اگر تقلیب کے مرکز و اور نصف قطر ر کے لحاظ سے نقاط ن اور ق کے مقلوب نَ اور قَ ہوں تو ثابت کرو کہ $نَ قَ = \frac{ر^2}{و ن \times و ق} \times ن ق$۔

(۵) اگر تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر کے دو نقطوں ن اور ق کے مقلوب نَ اور قَ ہوں اور تقلیب کے دائرہ پر کوئی نقطہ لا ہو تو ثابت کرو کہ ن لا^ ق = نَ لا^ قَ

(۶) اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کریں۔

(۷) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔

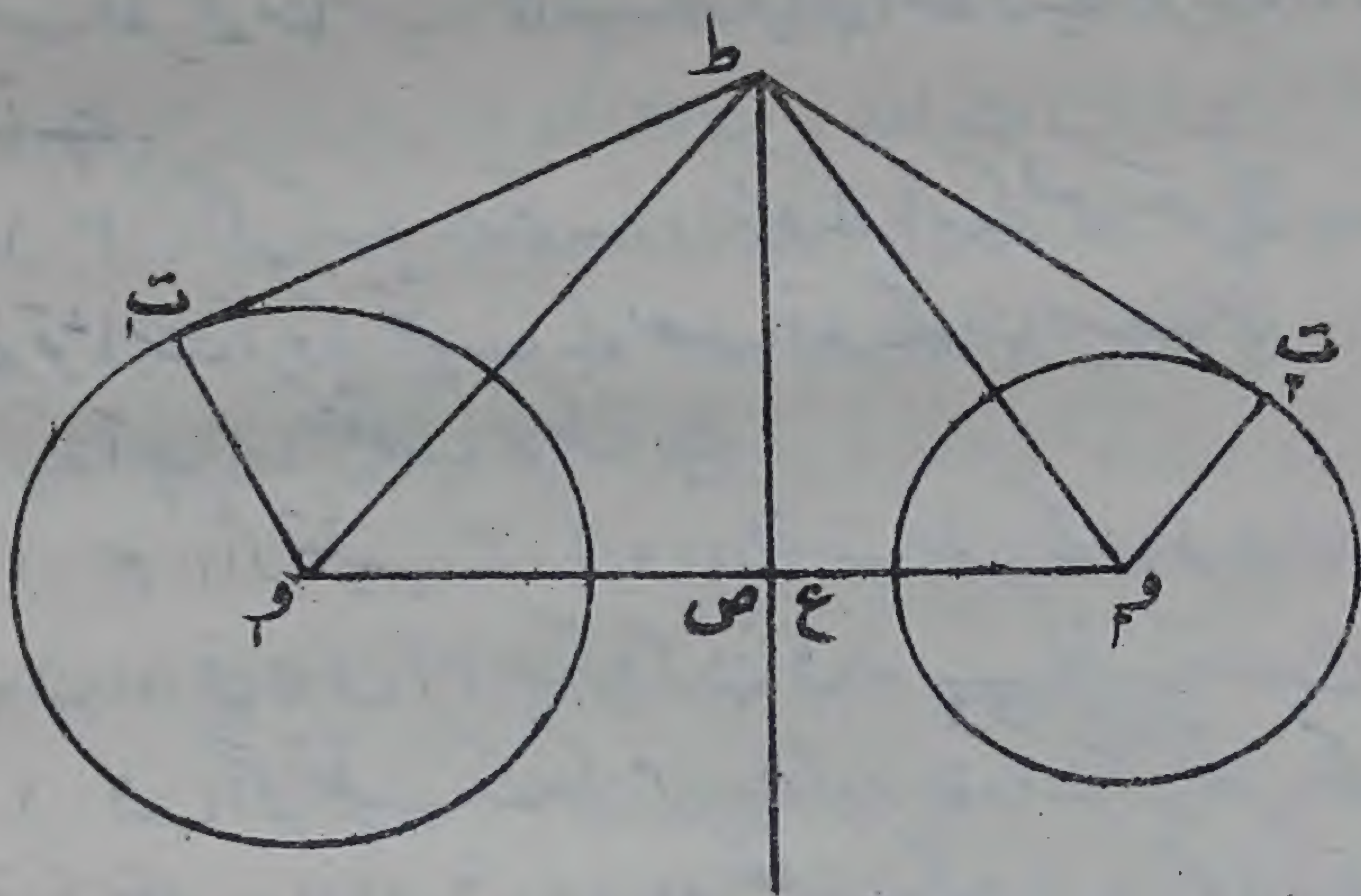
(۸) ایک دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔

(۹) ثابت کرو کہ دو علی القوائم دائروں میں سے ایک کے کسی قطر کی موسیقی تقسیم

دُوسرے کے محیط پر ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۹۲)۔

(۱۰) بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا منقلوب ل ہے ثابت کرو کہ نقاط ن اور ل میں سے گزرنے والا ہر دائرہ، دائرہ (و) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۱۱) بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ن اور ق مزدوج نقطے ہیں ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ن ق ہے، دائرہ (و) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۶۲۔ مسئلہ۔ اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھنچے ہوئے مماس مساوی ہوں ایک خطِ مستقیم ہے جو دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر عمود واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ($و_1$) اور ($و_2$) دو دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب $ر_1$ اور $ر_2$ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نقطہ ط سے ان دائروں تک کھنچے ہوئے مماسات ط $ت_1$ اور ط $ت_2$ مساوی ہیں۔

$و_2$ ط، $و_1$ $ت_1$، $و_1$ ط، اور $و_2$ $ت_2$ کو ملاؤ اور ط سے $و_1$ $و_2$ پر عمود ط ع نکالو۔

چونکہ حسبِ مفروض ط $ت_1$ = ط $ت_2$

$\therefore$ ط $ت_1^2$ = ط $ت_2^2$

$\therefore$ ط $و_1^2$ − $و_1$ $ت_1^2$ = ط $و_2^2$ − $و_2$ $ت_2^2$

∴ ع ط^2 + و$_1$ع^2 - و$_1$ت$_1^2$ = ع ط^2 + و$_2$ع^2 - و$_2$ت$_2^2$

∴ و$_1$ع^2 - و$_2$ع^2 = و$_1$ت$_1^2$ - و$_2$ت$_2^2$

= ر$_1^2$ - ر$_2^2$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

لیکن و$_1$ع^2 - و$_2$ع^2 = (و$_1$ع + و$_2$ع) (و$_1$ع - و$_2$ع)

= و$_1$و$_2$ (۲ ص ع)، جہاں و$_1$و$_2$ کا وسطی نقطہ ص ہے۔

∴ ۲ و$_1$و$_2$ × ص ع = ر$_1^2$ - ر$_2^2$ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکزوں کو ملانے والے خط پر ع ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقطہ ط کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مرکزوں کے خط پر عمود وار ہے۔

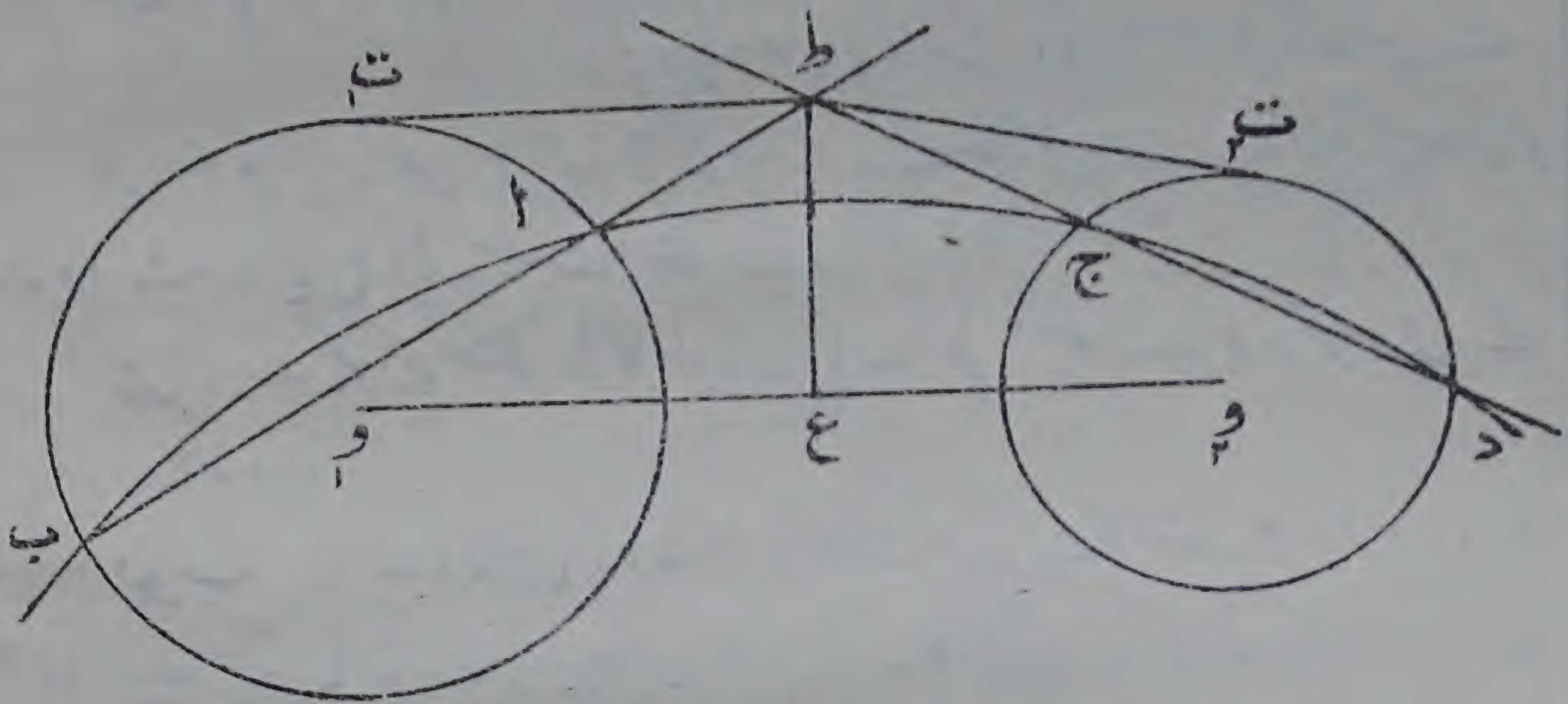
نوٹ۔ ثبوت بالا میں یہ بات ضمناً ثابت ہوئی ہے کہ نقطہ ع مرکزوں کے خط کو دو ایسے حصّوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مربعوں کا فرق دیے ہوئے دائروں کے نصف قطروں کے مربعوں کے فرق کے مساوی ہے۔

طالب علم بطور مشق کے یہ ثابت کرے کہ اس صورت میں طریق کی دوسری شرط بھی پوری ہوتی ہے یعنی اس طریق پر کے کسی نقطہ سے دائروں تک کھینچے ہوئے مماسات مساوی ہیں۔

۶۳۔ تعریف۔ اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھینچے ہوئے مماس مساوی ہوں دیے ہوئے دائروں کا **بنیادی محور** کہلاتا ہے۔

نوٹ (۱)۔ اگر دیے ہوئے دائرے متقاطع ہوں تو صریحاً اُن کے نقاطِ تقاطع مطلوبہ طریق پر واقع ہیں۔ اس لیے مطلوبہ طریق اِن نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والا خطِ مستقیم یعنی دیے ہوئے دائروں کا وترِ مشترک (ممدودہ) ہے۔ وترِ مشترک کے اُس حصّہ پر کے کسی نقطہ سے جو دیے ہوئے دائروں کے اندر ہے دائروں کے کوئی حقیقی مماس نہیں کھینچ سکتے ہیں، لیکن کہا جاتا ہے کہ خیالی مماس کھینچ سکتے ہیں اور ان کے خیالی طول مساوی ہیں۔ اس نکتہ کی مزید تشریح ہندسہ تحلیلی کی کسی کتاب میں پائی جا سکتی ہے۔

نوٹ (۲)۔ اگر دیے ہوئے دائرے غیر متقاطع ہوں تو نقطۂ ع دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔ اس لیے مطلوبہ طریق کلیۃً دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔

۶۴۔ دو دیے ہوئے دائروں (و$_۱$) اور (و$_۲$) کا بنیادی محور کھینچنا۔

کوئی دائرہ کھینچو جو دائرہ (و$_۱$) کو ا اور ب پر اور دائرہ (و$_۲$) کو ج اور د پر قطع کرے۔ اب اور ج د کے نقطۂ تقاطع ط سے مرکزوں کے خط و$_۱$ و$_۲$ پر عمود ط ع نکالو۔

تب ط ع مطلوبہ بنیادی محور ہوگا۔

نقطہ ط سے دائروں (و$_۱$) اور (و$_۲$) کے مماس ط ت$_۱$ اور ط ت$_۲$ کھینچو۔

ط ت$_۱^۲$ = ط ا × ط ب . . . . (۱)

اور ط ت$_۲^۲$ = ط ج × ط د . . . . (۲)

چونکہ نقاط ا، ب، ج، د مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے ط ا × ط ب = ط ج × ط د . . . . (۳)

(۱)، (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

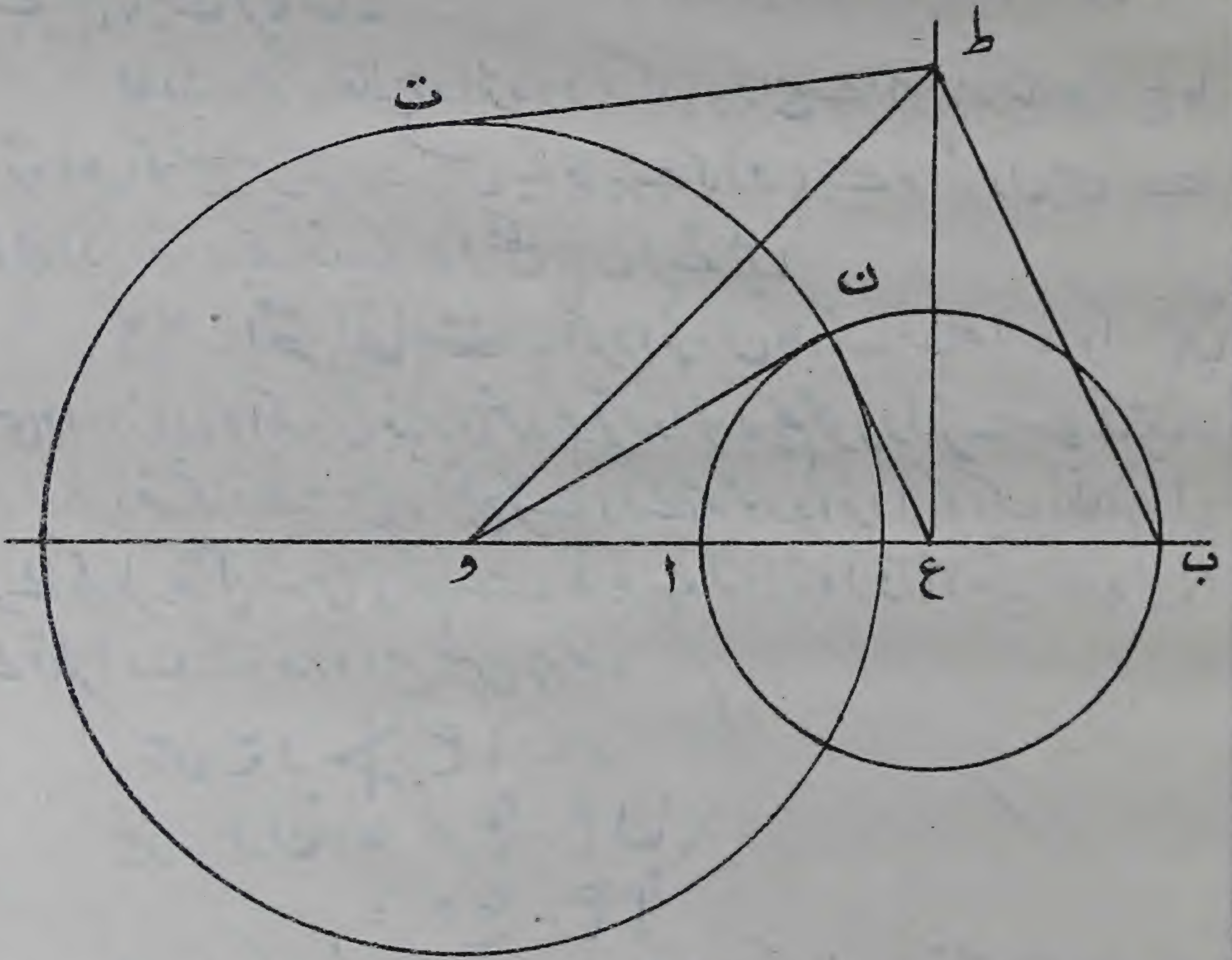
ط ت$_۱^۲$ = ط ت$_۲^۲$

یعنی ط ت$_۱$ = ط ت$_۲$

یعنی نقطہ ط دیے ہوئے دائروں (و) اور (و۲) کے بنیادی محور پر کا ایک نقطہ ہے۔ اور چونکہ ط ع مرکزوں کے خط و و۲ پر عمود ہے، اس لیے ط ع دیے ہوئے دائروں کا بنیادی محور ہے۔

نوٹ۔ متقاطع دائروں کا بنیادی محور کھینچنے کے لیے اس طولانی عمل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ اُن کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والا خطِ مستقیم ہی بنیادی محور ہوتا ہے۔

۶۵۔ مسئلہ۔ اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جن کے مرکز ایک دیے ہوئے دائرہ کے ایک قطر ممدودہ پر ہوں اور جو دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں تو ان دائروں میں سے کسی دو دائروں کا بنیادی محور وہ خطِ مستقیم ہوگا جو دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے گزرے اور دیے ہوئے قطر پر عمود وار ہو۔

ط
ت
ن
ب　ع　ا　و

فرض کرو کہ دیا ہوا دائرہ (ع) ہے۔ اُس کے ایک ثابت قطر ا ب ممدودہ پر کوئی نقطہ و لو اور و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو دائرہ (ع) کو نقطہ ن پر

علی القوائم قطع کرے۔ دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ع میں سے ایک خطِ مستقیم کھینچو جو ثابت قطر اب پر عمود وار ہو اور اس قطر پر کوئی نقطہ ط لو اور ط سے دائرہ (و) کا مماس ط ت کھینچو۔

و ط، و ن، ع ن اور ط ب کو ملاؤ۔

تب ط ت^2 = ط و^2 − و ن^2

= ط ع^2 + و ع^2 − (و ع^2 − ع ن^2)

= ط ع^2 + ع ن^2

= ط ع^2 + ع ب^2

= ط ب^2 جو و کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اس لیے دائرہ (و) جیسے کسی دو دائروں کا بنیادی محور خطِ مستقیم ع ط ہے یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ چونکہ نقطہ ع دائرہ (و) کے باہر واقع ہے، اس لیے بنیادی محور ع ط دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ (و) جیسے دائروں میں سے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

۶۶۔ **تعریفات**۔ اگر دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان میں سے کسی دو دائروں کا ایک ہی بنیادی محور ہو تو یہ دائرے ہم محور دائرے کہلاتے ہیں۔

دفعہ گذشتہ میں نہ قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل کرنے کے طریقہ کی تشریح کی گئی ہے۔ ظاہر ہے کہ دائرہ (و) کا مرکز دائرہ (ع) کے قطر ا ب کے اندر واقع نہیں ہو سکتا

یعنی ع و > ع ا۔

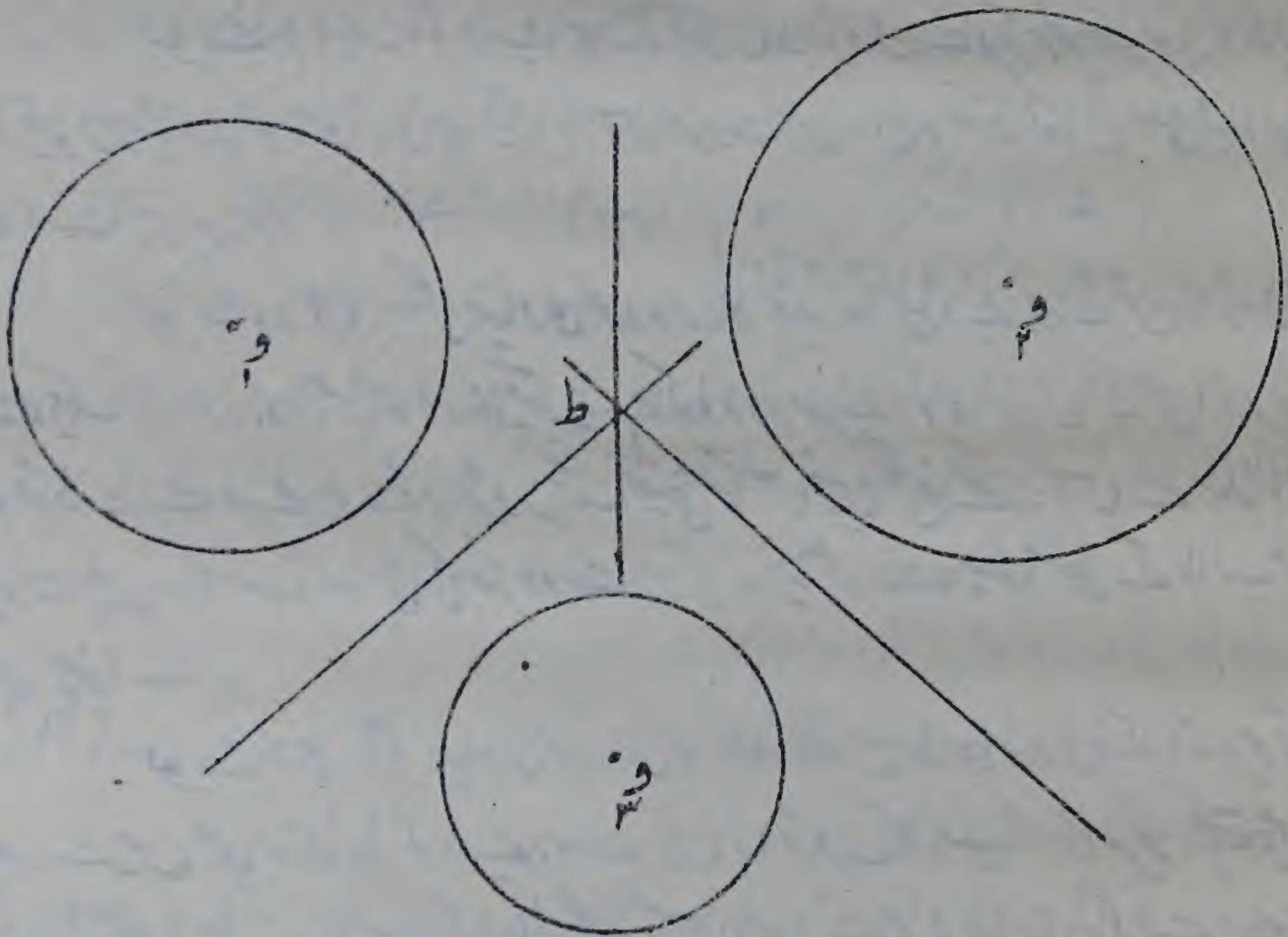
نیز و ن^2 = و ع^2 − ع ن^2

= و ع^2 − ع ا^2

اس لیے جوں جوں نقطہ و دائرہ (ع) کے قریب آتا ہے، ویسے ہی دائرہ (و) کا نصف قطر بتدریج گھٹتا ہے اور جب نقطہ و نقاط ا اور ب میں سے کسی ایک پر منطبق ہوتا ہے تو دائرہ (و) کا نصف قطر صفر ہے۔ نقاط ا اور ب

ہم محور دائروں کے اس نظام کے **انتہائی نقطے** کہلاتے ہیں جس کا ہر رکن دائرہ
(ع) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے
نظام کے **نقطہ دائرے** بھی کہلاتے ہیں۔

اگر متعدد دائرے ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو ثابت
نقطوں میں سے گزرتا ہے تو ان دائروں سے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا
ایک نظام حاصل ہوتا ہے اور اس نظام کا چھوٹے سے چھوٹا دائرہ وہ دائرہ ہے جو
وترِ مشترک کے قطر پر کھینچا گیا ہے۔ اس لیے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کے
نظام کی صورت میں انتہائی نقطے یا نقطہ دائرے وجود نہیں رکھتے ہیں۔

۶۷۔ مسئلہ۔ تین دائروں میں سے دو دو دائروں
کے تین بنیادی محور متراکز ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ $(و_1)$، $(و_2)$ اور $(و_3)$ تین دیے ہوئے دائرے ہیں۔
نیز فرض کرو کہ دائروں $(و_1)$ اور $(و_3)$ کا بنیادی محور دائروں $(و_2)$ اور $(و_3)$
کے بنیادی محور کو نقطہ ط پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ دائروں $(و_2)$ اور $(و_1)$ کے

بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔

چونکہ نقطہ ط دائروں (و۱) اور (و۲) کے بنیادی محور پر ہے، اس لیے ط سے دائروں (و۱) اور (و۲) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے طول مساوی ہیں۔

اسی طرح سے ط سے دائروں (و۲) اور (و۳) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے طول بھی مساوی ہیں۔

اس لیے ط سے دائروں (و۳) اور (و۱) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے طول مساوی ہیں۔

اس لیے نقطہ ط دائروں (و۳) اور (و۱) کے بنیادی محور پر واقع ہے۔

یعنی دائروں (و۳) اور (و۱) کا بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔

تعریف - تین دائروں میں سے دو دو کے تین بنیادی محوروں کے نقطۂ تراکز کو ان دائروں کا **بنیادی** مرکز کہتے ہیں۔

نوٹ (۱) - اگر دیے ہوئے تینوں دائروں کے مرکز ہم خط ہوں تو ظاہر ہے کہ تینوں بنیادی محور متوازی ہونگے اور اس صورت میں ان کا نقطۂ تقاطع یعنی بنیادی مرکز لا متناہی پر ہوگا۔

نوٹ (۲) - اگر بنیادی محوروں کا نقطۂ تقاطع دیے ہوئے تین دائروں میں سے ایک کے اندر ہو (جس کا لازمی نتیجہ یہ ہے کہ وہ دوسرے دو دائروں کے بھی اندر ہوگا) تو نقطہ ط سے دیے ہوئے دائروں تک حقیقی مماس نہیں کھنچ سکتے۔ اس لئے مسئلہ بالا کے ثبوت میں مناسب تبدیلی کی ضرورت ہوگی۔ یہ ثبوت بطور مشق کے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

نوٹ (۳) اگر بنیادی محوروں کا نقطۂ تقاطع ط دائروں کے اندر ہو تو اس صورت میں بھی نقطۂ ط کو دیے ہوئے تین دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔ ہندسۂ تحلیلی میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اس صورت میں بنیادی مرکز سے دیے ہوئے تین دائروں تک کھنچے ہوئے خیالی مماسات کے خیالی طول مساوی ہیں۔

مسئلہ ۱۷

(۱) ثابت کرو کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان دائروں کے مشترک مماسوں

کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) اگر دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز یہ نقطہ ہے اور نصف قطر مماس کا طول ہے دیے ہوئے دونوں دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۳) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور نقطۂ تماس پر کا مشترک مماس ہے۔

(۴) اگر تین دائروں میں سے ہر دو ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو نقاطِ تماس پر کے مماس متراکز ہوتے ہیں۔

(۵) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کو قطر مان کر تین دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان دائروں کا بنیادی مرکز مثلث کا مرکزِ عمودی ہے۔

(۶) تین دیے ہوئے دائروں کا بنیادی مرکز و ہے اور و سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس و ت کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز و اور نصف قطر و ت ہے دیے ہوئے تینوں دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گزرینگے۔

(۸) اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۰) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور دو دیے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۱) (و₁) اور (و₂) دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔ نقطہ ط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ط سے دائروں (و₁) اور (و₂) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کے متوازی ہے۔

پانچواں باب

دائروں کا بنانا

۶۸۔ تین شرائط کے دیے جانے پر ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے مثلاً (۱) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے (۲) ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے جس کا نصف قطر دیا ہوا ہو اور جو ایک دیے ہوئے خط (یا دائرہ) کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۶۹۔ دو شرائط کو پورا کرنے والے دائروں کے مرکزوں کے طریق کے متعلق مندرجۂ ذیل اہم نتائج سے طالب علم پہلے ہی سے واقف ہوگا۔

(۱) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دیے ہوئے نقطہ پر ہے۔

(۲) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کا عمودی مُنصِّف ہے۔

(۳) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط کو مس کرے اِن خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصِّف ہیں۔

(۴) ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط ہے جو نقطۂ مذکور میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۵) ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق دیے ہوئے نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والا خط ہے۔

(۶) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے دیے ہوئے خط کے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے۔

(۷) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرتا ہے دیے ہوئے دائرہ کے ساتھ ہم مرکز دائروں کا ایک جوڑا ہے۔

امثلہ ۱۸

(۱) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

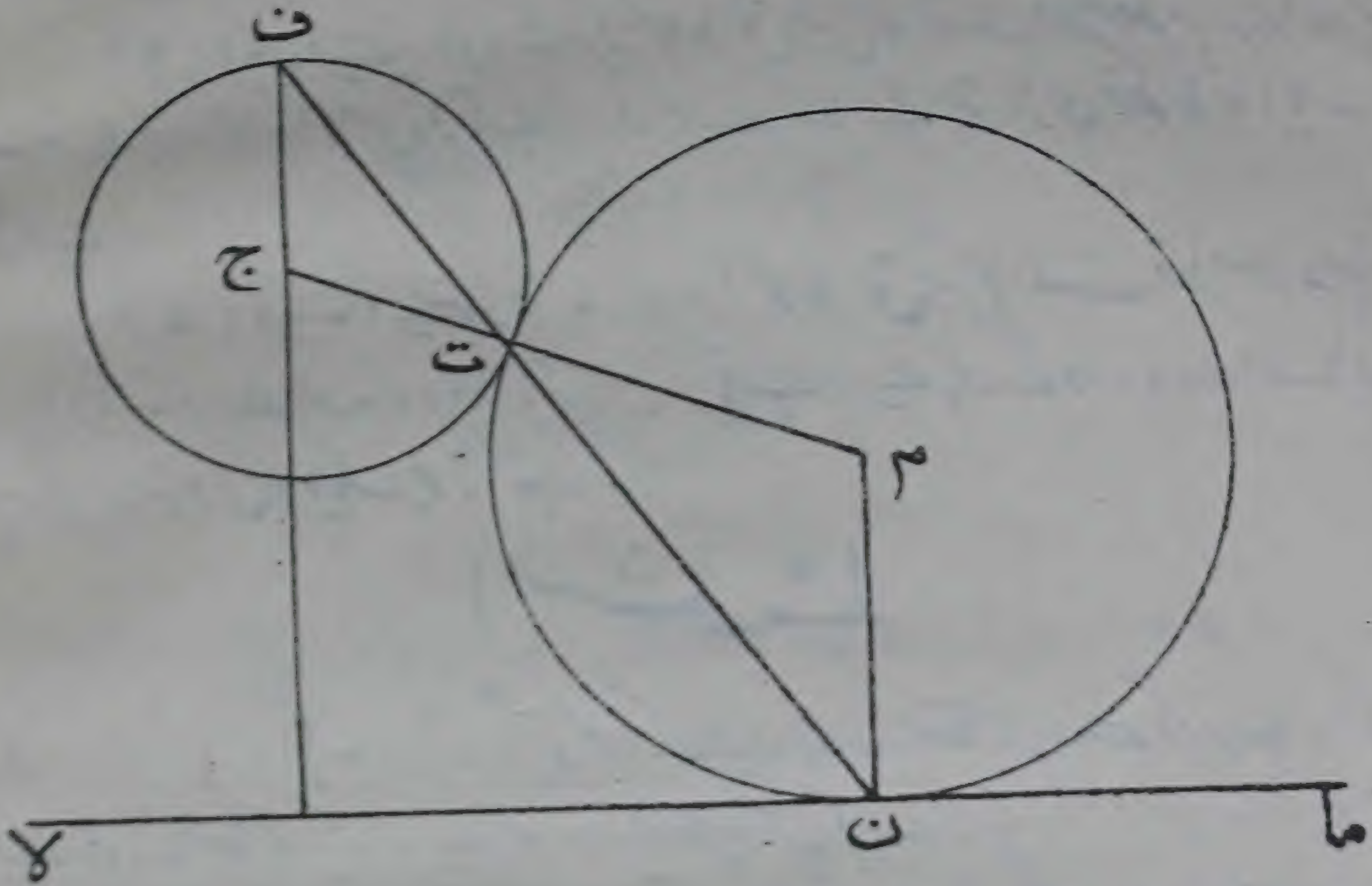
(۲) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو دو معلوم نقطوں میں سے گزرے۔

(۳) دیے ہوئے نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوں (یا دائروں) کو مس کرے۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۴) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو یا ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔

(۵) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۷۰۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم لا ما کو ایک دیے ہوئے نقطہ ن پر مس کرے۔

تحلیل ۔ فرض کرو کہ دائرہ (م) مطلوبہ دائرہ ہے اور یہ دیے ہوئے دائرہ (ج) کو نقطۂ ت پر مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ن ت دائرہ (ج) سے مکرر نقطہ ف پر ملتا ہے۔
ج ف، ج ت، م ت اور م ن کو ملاؤ۔
مثلث متساوی الساقین م ن ت میں
م نٛ ت = م تٛ ن .... (۱)
نیز مثلث متساوی الساقین ج ت ف میں
ج فٛ ت = ج تٛ ف .... (۲)
لیکن چونکہ دائرہ (م) دائرہ (ج) کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے
اس لیے م ت ج خطِ مستقیم ہے
اس لیے م تٛ ن = ج تٛ ف .... (۳)
نتائج (۱)، (۲)، (۳) کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے کہ
م نٛ ت = ج فٛ ت
اس لیے ج ف // م ن

اب چونکہ دائرہ (م) خط لا ما کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے
اس لیے م ن عمود ہے لا ما پر
اس لیے ج ف بھی عمود ہے لا ما پر
پس اگر دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ج سے دیے ہوئے خط لا ما پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود اور دائرہ (ج) کے نقطۂ تقاطع سے نقطہ ف حاصل ہوتا ہے اور ف ن اور دائرہ (ج) کا نقطۂ تقاطع ت مطلوبہ نقطۂ تماس ہے اور ج ت اور ن م کے تقاطع سے مطلوبہ دائرہ کا مرکز م حاصل ہوتا ہے۔
اِس تحلیل کی بنا پر طالب علم اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت خود بہم پہنچائے۔

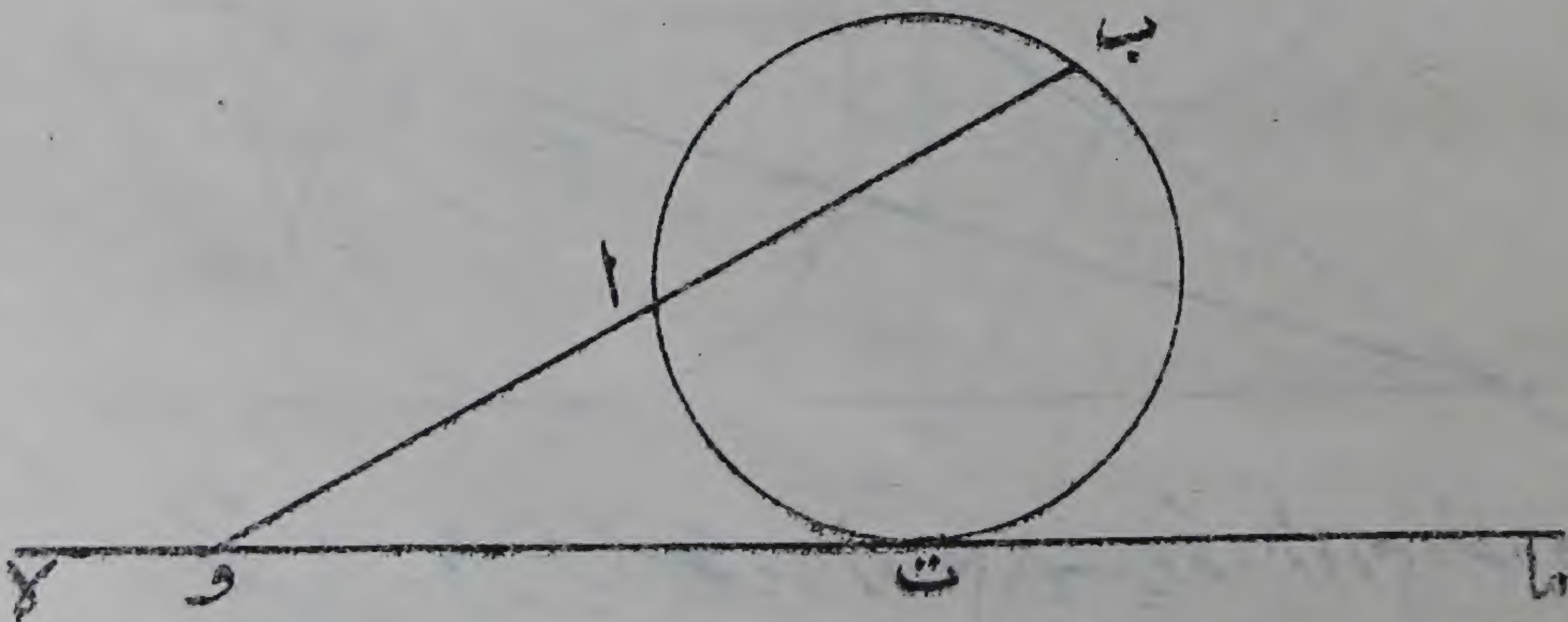
نوٹ۔ وہ خط جو ج میں سے گزرتا ہے اور لا ما پر عمود ہے دائرہ (ج) کو ایک اور نقطہ ف پر بھی کاٹتا ہے جس کی مدد سے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا ایک اور دائرہ بھی کھینچ سکتا ہے۔

نوٹ۔ مندرجۂ بالا طریقہ بآسانی ذیل کے عملی مسئلہ کے حل کے طریقہ کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

مسئلۂ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ایک دیے ہوئے نقطہ ت پر مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط لا ما کو بھی مس کرے۔

اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت طالب علم خود بطور مشق کے بہم پہنچائے۔

۱۷ مسئلۂ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے خط لا ما کو

ب
ا
لا　و　ت　ما

مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ا اور ب میں سے جو لاما کی ایک ہی جانب واقع ہوں گزرے۔

تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ دیے ہوئے خط لاما کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خط ب ا دیے ہوئے خط لاما کو نقطہ و پر قطع کرتا ہے۔

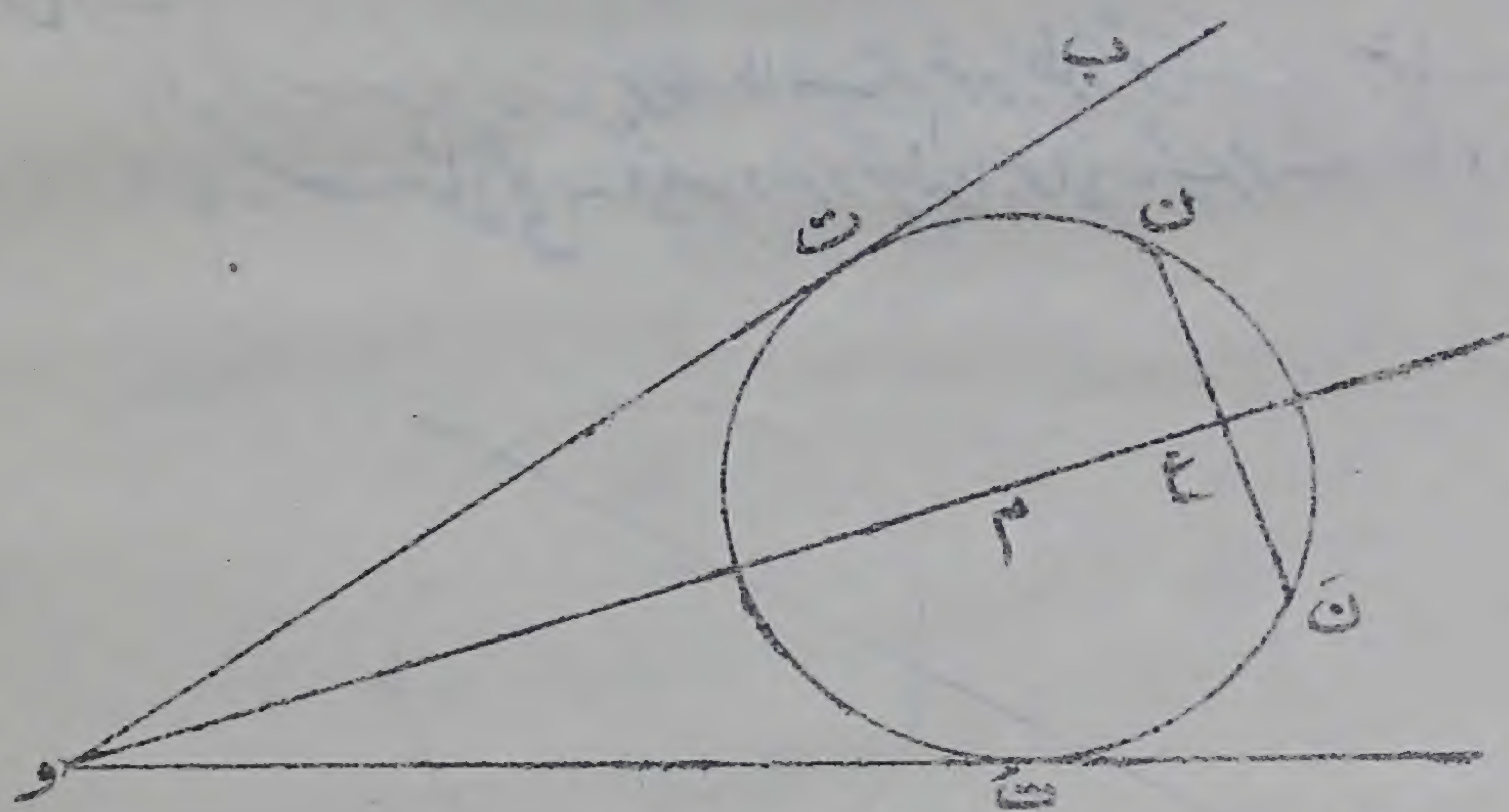
تب   و ت² = و ا × و ب جو معلوم ہے

اس لیے و ت معلوم ہو سکتا ہے اور اس کی مدد سے دیے ہوئے خط لاما اور مطلوبہ دائرہ کا نقطۂ تماس ت حاصل ہوتا ہے۔ پس دائرہ ا ب ت مطلوبہ دائرہ ہے۔

نوٹ - چونکہ خط لاما پر و کی دوسری جانب ایک اور نقطہ تَ بھی ایسا لیا جاسکتا ہے کہ و تَ = و ت، اس لیے ایک اور دائرہ ا ب تَ کھینچ سکتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

طالب علم اس تحلیل کی بنا پر عمل حاصل کرے اور ثبوت بہم پہنچائے۔

۴۷ - مسئلہ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط و ا، و ب کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے گزرے۔

ب
ت
ن
ع
م
نَ
و
تَ

تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے۔ چونکہ دائرہ (م) خطوط و ا

اور و ب کو مس کرتا ہے، اس لیے اس کا مرکز ان خطوط کے درمیانی زاویہ کے منتصف پر ہے۔

ن سے د م پر عمود ن ع نکالو اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ (د م) سے مکرر نَ پر ملے۔

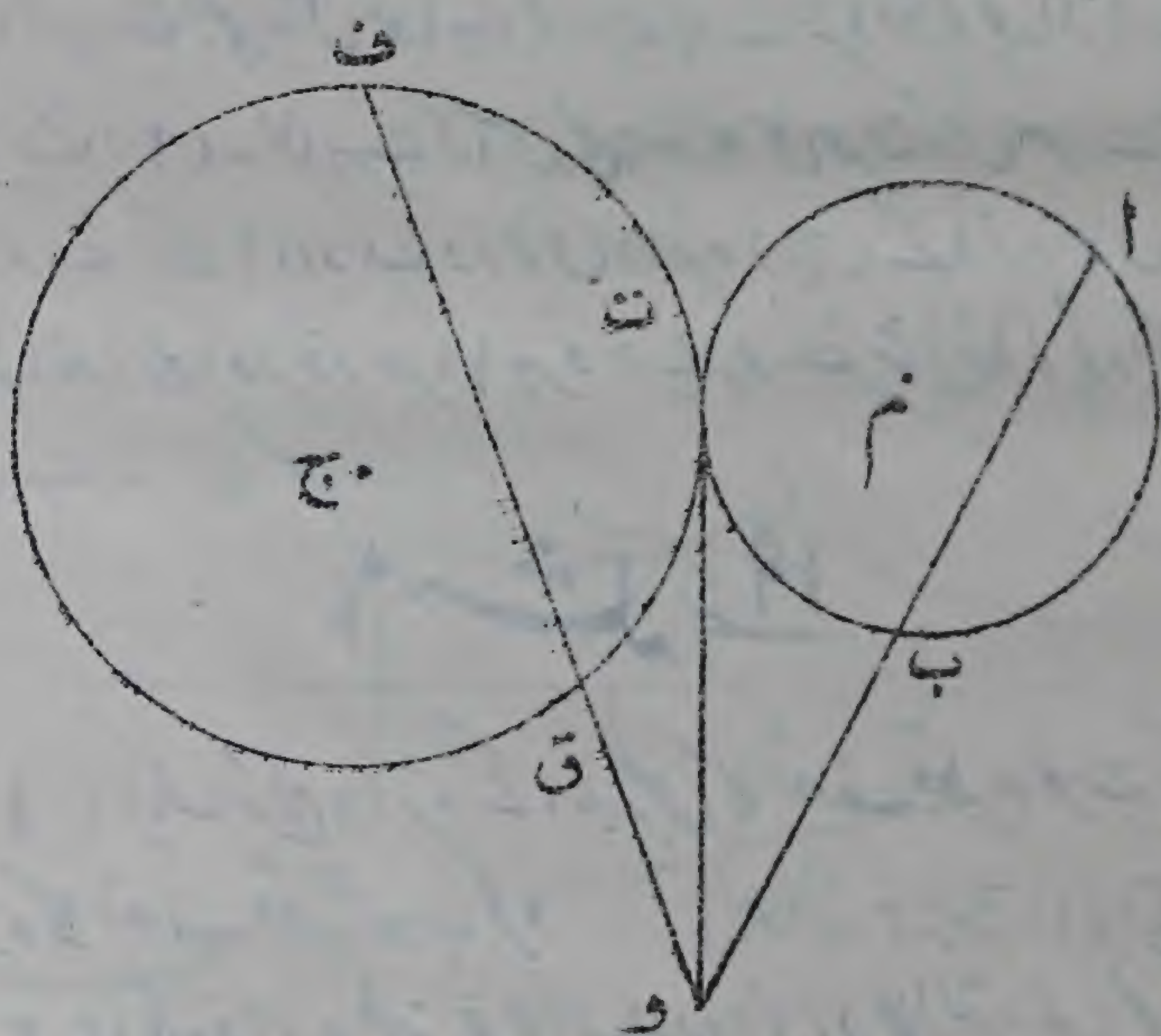
تب ن ع = ع نَ ۔ پس نَ معلوم ہو سکتا ہے۔

اور مطلوبہ دائرہ وہ دائرہ ہے جو نقطوں ن اور نَ میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خطوط میں سے کسی ایک کو مس کرتا ہے۔

نوٹ (۱) چونکہ دو ایسے دائرے کھنچ سکتے ہیں جو ن اور نَ میں سے گزرتے ہیں اور دیے ہوئے خطوط میں سے ایک کو مس کرتے ہیں، اس لیے اس عملی مسئلہ کے دو حل ہیں۔

نوٹ (۲) اس صورت پر غور کرو جبکہ دیے ہوئے خط متوازی ہوں۔

نوٹ (۳)۔ اگر دیا ہوا نقطہ ن منتصف د م پر ہو تو عمل کی تشریح کرو۔

۴۷۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ا اور ب میں سے گزرے۔

تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ت پر مس کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ت پر ان دائروں کا مشترک مماس خط ا ب سے د پر ملتا ہے۔

اب اگر د میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ (ج) سے ف اور ق پر ملے تو د ف × د ق = د ت² = د ا × د ب

پس معلوم ہوا کہ ا، ب، ف، ق مشترک المحیط نقطے ہیں۔

ترکیب۔ مندرجہ بالا تحلیل کی بنا پر مطلوبہ دائرہ کھینچنے کا عمل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے۔

کوئی دائرہ کھینچو جو ا اور ب میں سے گزرے اور دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ف اور ق پر قطع کرے۔ ا ب اور ف ق کے نقطۂ تقاطع د میں سے دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مماس د ت کھینچو۔

تب ا، ب، ت میں سے گزرنے والا دائرہ دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔ طالب علم اس کا ثبوت خود بہم پہنچائے۔

نوٹ (۱)۔ د سے دائرہ (ج) کا ایک اور مماس د تَ بھی کھینچ سکتا ہے اس لئے ایک اور دائرہ ا ب تَ بھی حاصل ہوتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ ظاہر ہے کہ اس عملی مسئلہ کا حل صرف اس صورت میں ممکن ہے جب کہ دیے ہوئے نقطے ا اور ب دونوں دائرہ (ج) کے اندر ہوں یا دونوں باہر۔ اگر ایک نقطہ اندر ہو اور دوسرا باہر تو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا دائرہ کھینچنا ناممکن ہے۔

امثلہ ۱۹

(۱) ایک ربع دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ۴ سمر ہے ایک دائرہ بناؤ اور اس دائرہ کا نصف قطر محسوب کرو [جواب ۴ (۲√ - ۱) انچ]

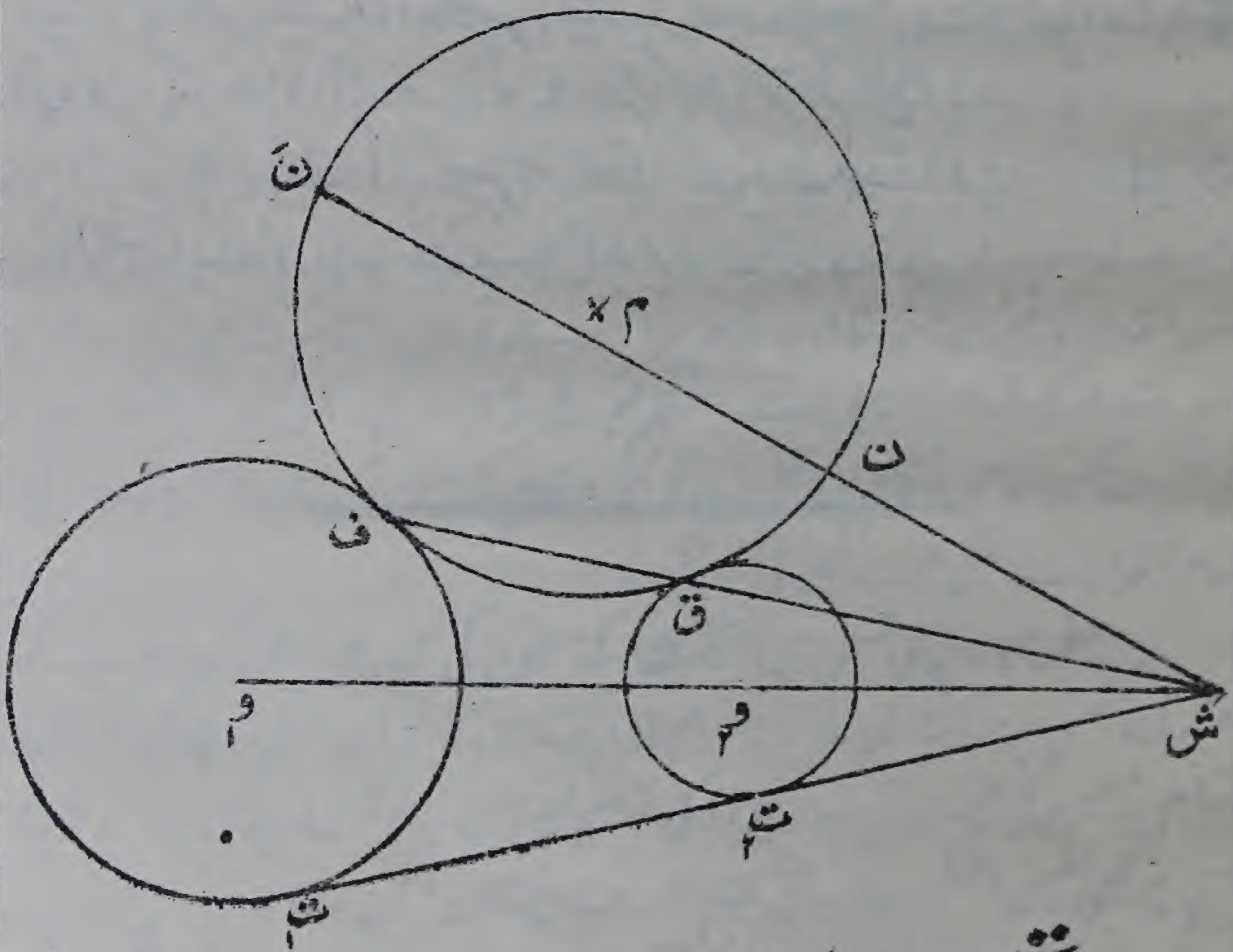
(۲) ایک دائرہ کھینچو جو حوالہ کے دونوں (علی القوائم) محوروں کو مس کرے اور نقطہ (۲، ۲) میں سے گزرے۔ بتاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ ان دائروں کے

نصف قطر محسوب کرو۔ [جواب :- (۴ ± √۸) انچ]

(۳) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔ دائرہ کے نصف قطر کا طول مثلث کے ضلع کے طول اَ کی رقوم میں حاصل کرو۔ [جواب $\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۴} \times$ اَ]

(۴) ۵ سمر نصف قطر والے دائرے کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے دائرہ کو اور نیز باقی دو دائروں کو مس کرے۔ اگر ان تین دائروں میں سے ایک کا نصف قطر ر سمر ہو تو ثابت کرو کہ ر [۱ + قم ۶۰°] = ۵

(۵) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔

(۶) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے دائروں (م۱) اور (م۲) کو خارجاً مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے (جو دائروں کے باہر ہے) گزرے۔

[تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائروں کو

ت اور ق پر مس کرتا ہے۔ خط ف ق مرکزوں کے خط و و سے سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر ملتا ہے (دیکھو امثلہ ۱۴ سوال ۳)۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے دائروں کا ایک راست مشترک مماس ت ت ہے، یہ مماس سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے گزرتا ہے۔

اور ش ف × ش ق = ش ت × ش ت (دیکھو امثلہ ۱۴ سوال ۴)

فرض کرو کہ ش ن مطلوبہ دائرہ سے مکرر نَ پر ملتا ہے۔

تب ش ن × ش نَ = ش ف × ش ق = ش ت × ش ت۔ اس لیے ن، ت، ت، نَ مشترک المحیط ہیں۔ اس بناء پر نقطہ نَ معلوم ہو سکتا ہے، پس وہ دائرہ جو معلومہ نقطوں ن اور نَ میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے دائروں میں سے کسی ایک کو خارجاً مس کرتا ہے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے]۔

(۷) سوال بالا کی مدد سے ایک دائرہ کھینچو جو تین دیے ہوئے دائروں کو خارجاً مس کرے۔

(۸) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے، ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جس کا مرکز ایک دیے ہوئے خط پر ہو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے۔

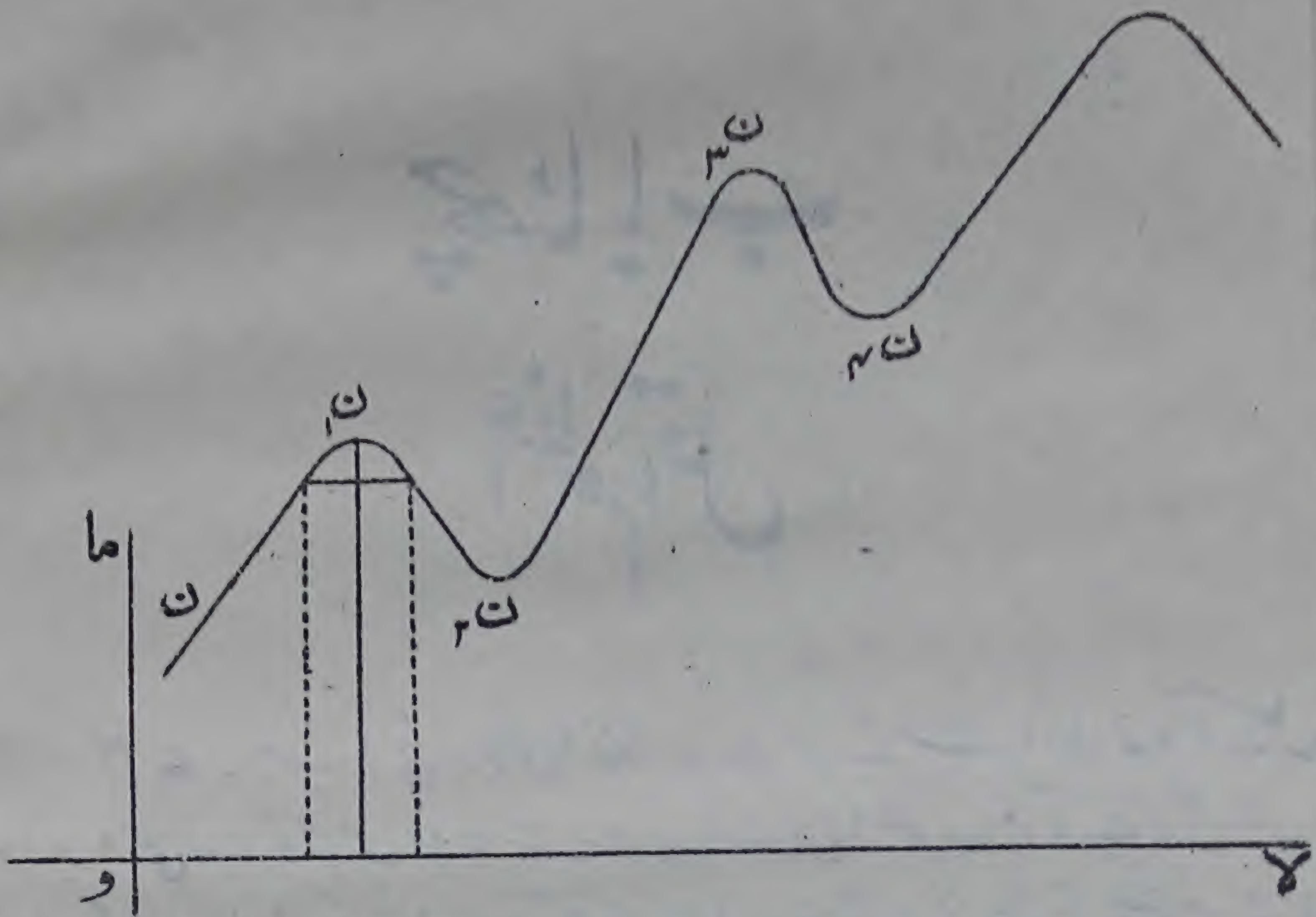
چھٹا باب

اعظم اقل

۴۷ ۔ جب کوئی ہندسی مقدار دیے ہوئے شرائط کے ماتحت مسلسل طور پر بدلتی ہے تو بعض اوقات یہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے کہ آیا اس تبدیلی کے دوران میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ مقدار بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوتی ہے یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتی ہے ۔ اگر ایسے مقام ہوں تو اول الذکر نوعیت کے مقام کے لیے متغیر مقدار کی قیمت کو اعظم قیمت اور آخر الذکر نوعیت کے مقام کے لیے اُس کی قیمت کو اقل قیمت کہتے ہیں ۔ بالفاظِ دیگر اگر کسی متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اعظم ہے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اعظم قیمت بڑی ہو گی ۔ اسی طرح اگر متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اقل ہے تو اُس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اقل قیمت چھوٹی ہو گی ۔

صفحہ ۱۱۴ پر کی شکل میں نقطہ ن کے معین کی تبدیلی پر غور کرو جب کہ نقطہ ن منحنی پر حرکت کرے ۔ مقام ن$_۱$ پر معین کا طول اعظم ہے کیونکہ اس مقام ن$_۱$ پر معین کی قیمت قرب و جوار کی تمام قیمتوں سے بڑی ہے اور اسی طرح ن$_۳$ پر بھی معین اعظم ہے ۔ نیز ن$_۲$ اور ن$_۴$ پر معین اقل ہے ۔

واضح رہے کہ بالعموم اعظم قیمت سے مُراد بڑی سے بڑی قیمت

نہیں ہوتی ہے۔

مثلاً شکل بالا میں ن۱ پر معین اعظم ہے لیکن یہ قیمت معین کی قیمتوں میں سب سے بڑی نہیں ہے۔ چنانچہ ن۴ پر کا معین جو اقل ہے ن۱ پر کے معین سے جو اعظم ہے بڑا ہے۔ اسی طرح یہ ضروری نہیں ہے کہ اقل قیمت متغیر مقدار کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہو۔

اِس باب میں ہم صرف ایسی تبدیلیوں پر غور کرینگے جن میں متغیر مقدار صرف ایک مرتبہ اعظم یا اقل قیمت اختیار کرتی ہے۔ ایسی صورتوں میں اعظم قیمت درحقیقت بڑی سے بڑی قیمت ہے اور اقل قیمت چھوٹی سے چھوٹی۔

۵۔ بالعموم اعظم یا اقل قیمتوں کی تحقیق میں مندرجۂ ذیل اشارے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

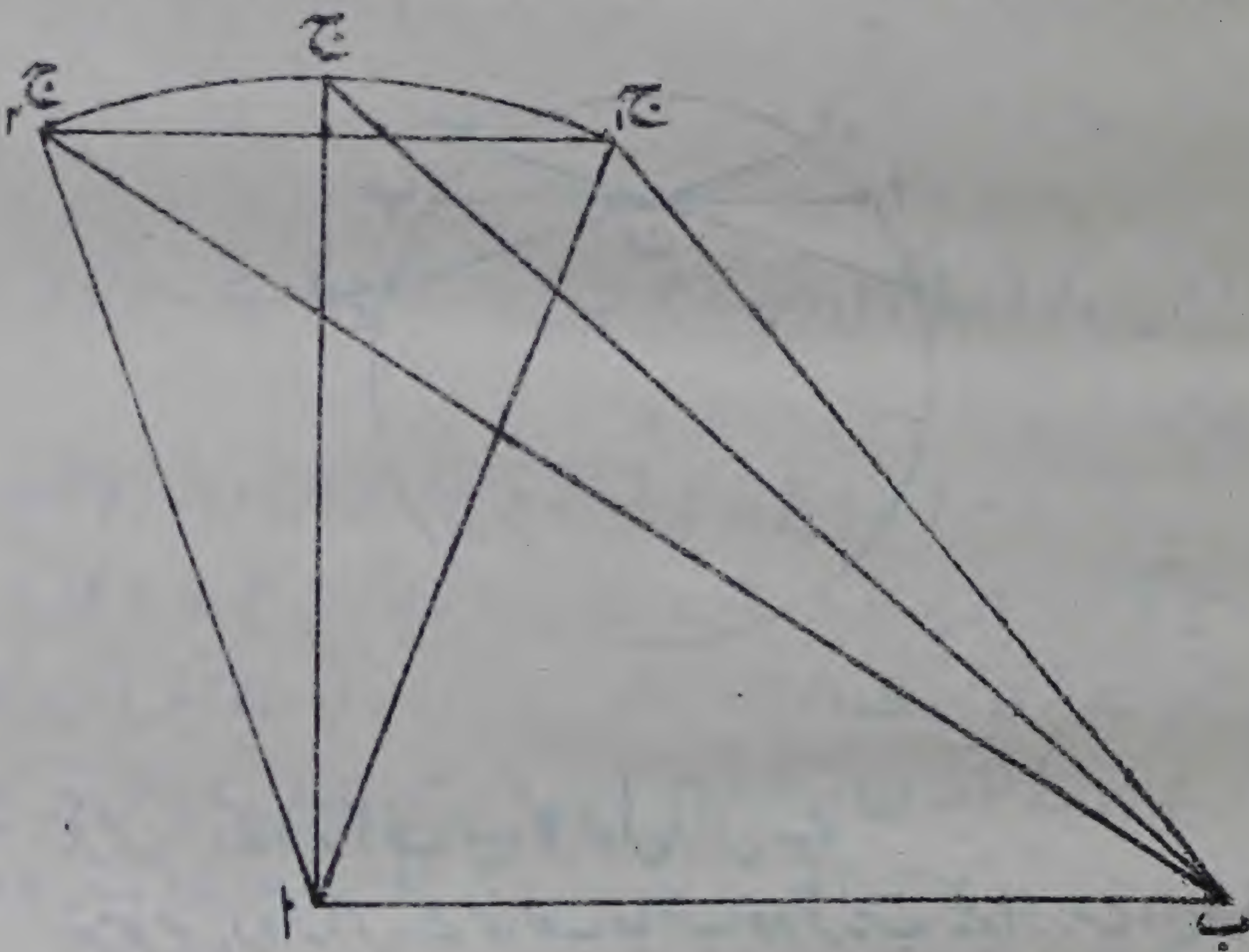
(۱) مقدار متغیر کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت ہوگی جو شکل بالا سے واضح ہے۔

عملاً مقدار متغیر کی اعظم یا اقل قیمت یہ فرض کرنے سے دریافت کی جاتی ہے کہ

اس مقام کے مخالف جانب قریب کے دو مقامات کے لیے متغیر مقدار کی قیمتیں مساوی ہیں اور بالآخر یہ مساوی قیمتیں اعظم یا اقل قیمت پر منطبق ہو جاتی ہیں۔

(۲) عموماً مقامِ تشاکل پر اعظم یا اقل قیمت واقع ہوتی ہے۔

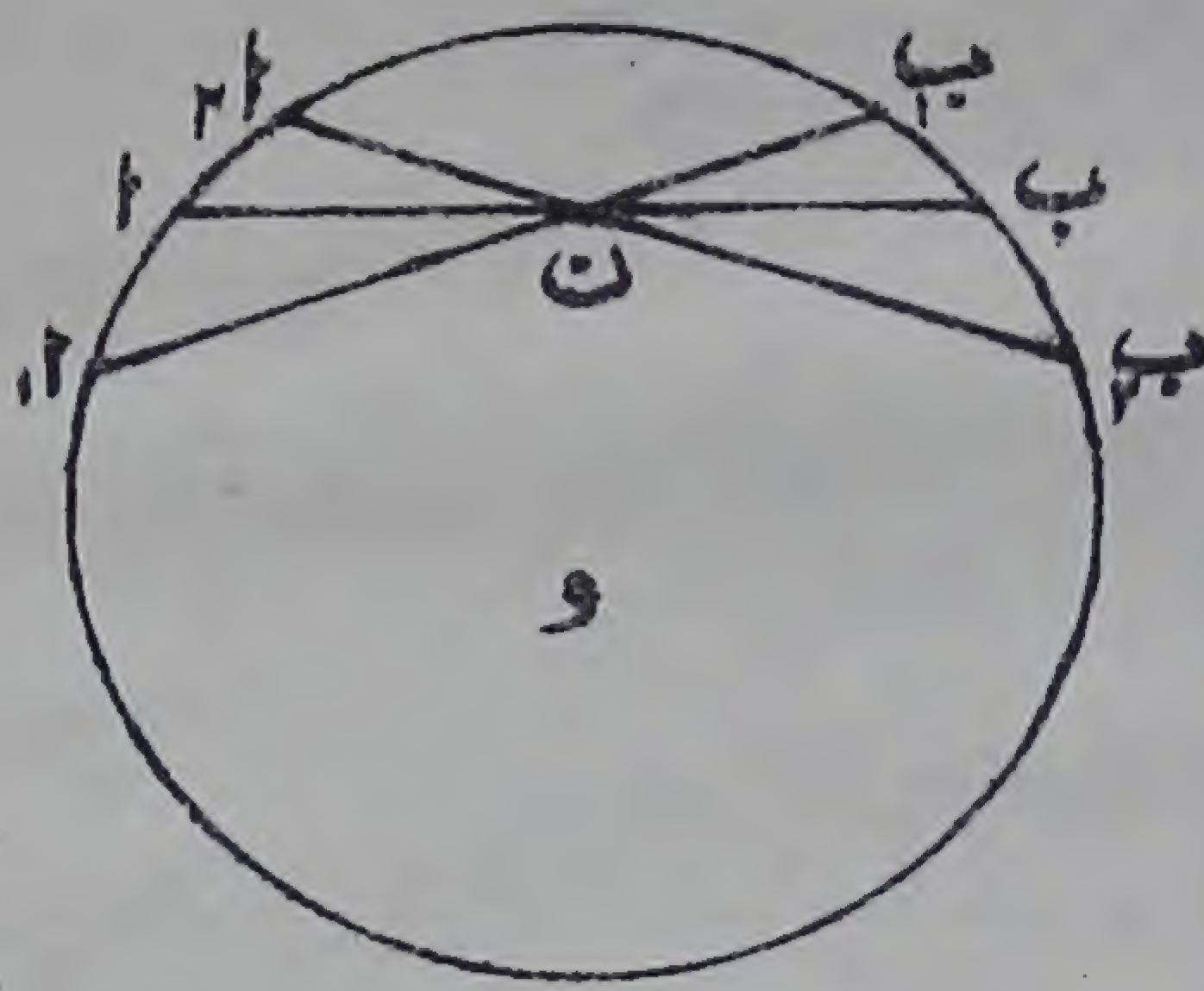
۷۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دیے ہوئے ہوں تو مثلث کا رقبہ اعظم ہوگا جب کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو۔

فرض کرو کہ مثلث اب ج کے اضلاع اب، اج دیے گئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ضلع اب کا مقام ثابت ہے۔ تب ج کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ا ہے اور جس کا نصف قطر دیے ہوئے ضلعے اج کا طول ہے۔

فرض کرو کہ راس کے مقام ج کے لیے مثلث اب ج کا رقبہ اعظم ہے۔ اس مقام کے مخالف جانب ج کے طریق پر دو قریب کے نقطے ج۱ اور ج۲ ایسے لو کہ مثلثات اب ج۱ اور اب ج۲ کے رقبے مساوی ہوں۔ تب ج۱ ج۲ // اب کے۔ جب ج۱ اور ج۲ دونوں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں تو ج۱ ج۲ سے گزرنے والا خط نقطہ ج پر کا مماس ہوگا اس لیے اگر △ اب ج کا رقبہ اعظم ہے تو ج پر دائرہ (ا) کا مماس قاعدہ اب کے متوازی ہوگا۔

یعنی ج اَ ب = قائمہ زاویہ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ △ = $\frac{1}{2}$ بَ جَ جب ا ہیں، بَ، جَ مستقل ہیں۔ اس لیے △ اعظم ہوگا جبکہ جب ا اعظم ہو۔

یعنی اَ = ۹۰° اور اعظم رقبہ = $\frac{1}{2}$ بَ جَ

۷۷۔ مسئلہ۔ ایک دیے ہوئے دائرہ (و) کے اندر کے ایک ثابت نقطہ ن میں گزرنے والے تمام وتروں میں اس وتر کا طول اقل ہوتا ہے جس کی تنصیف نقطہ ن پر ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ وتر ا ن ب کا طول اقل ہے۔

نیز فرض کرو کہ اس کے مخالف جانب دو قریب کے اور مساوی طول والے وتر ا۱ ن ب۱، ا۲ ن ب۲ ہیں۔

چونکہ ا۱ ب۱ = ا۲ ب۲

اس لیے قطعہ ا۱ ا۲ ب۱ کا رقبہ = قطعہ ا۲ ب۱ ب۲ کا رقبہ

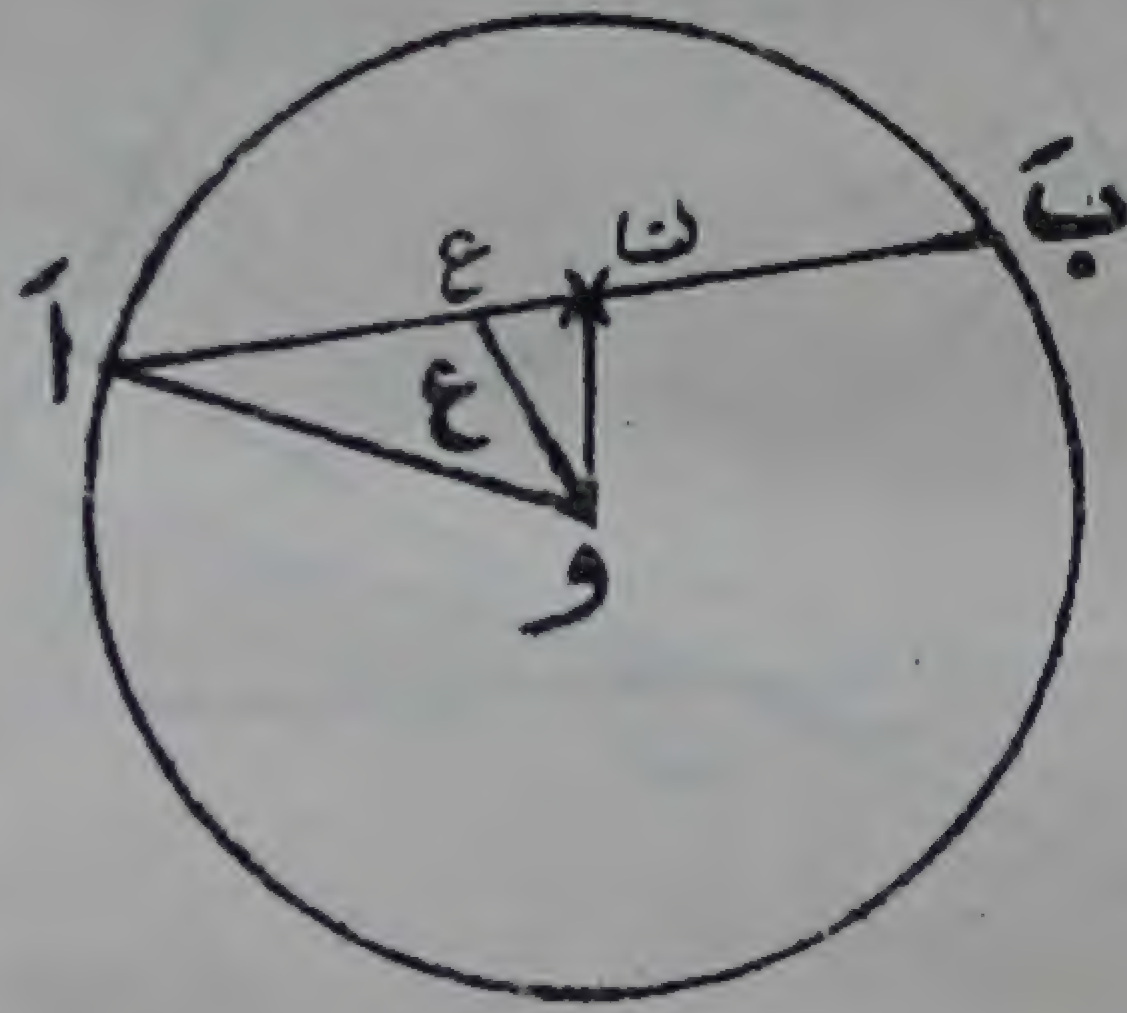
یعنی △ ا۱ ن ا۲ = △ ب۱ ن ب۲ [کیونکہ ن ا۱، ن ا۲ اور قوس ا۱ ا۲ سے گھرا ہوا رقبہ تقریباً مساوی ہے △ ن ا۱ ا۲ کے رقبہ کے]۔

لیکن ان مثلثات کے مشترک راس ن پر کے زاویے مساوی ہیں

اس لیے ن ا۱ × ن ا۲ = ن ب۱ × ن ب۲

انتہا میں نقاط ا، اور ا، دونوں ا پر منطبق ہوتے ہیں اور ب، اور ب، دونوں ب پر

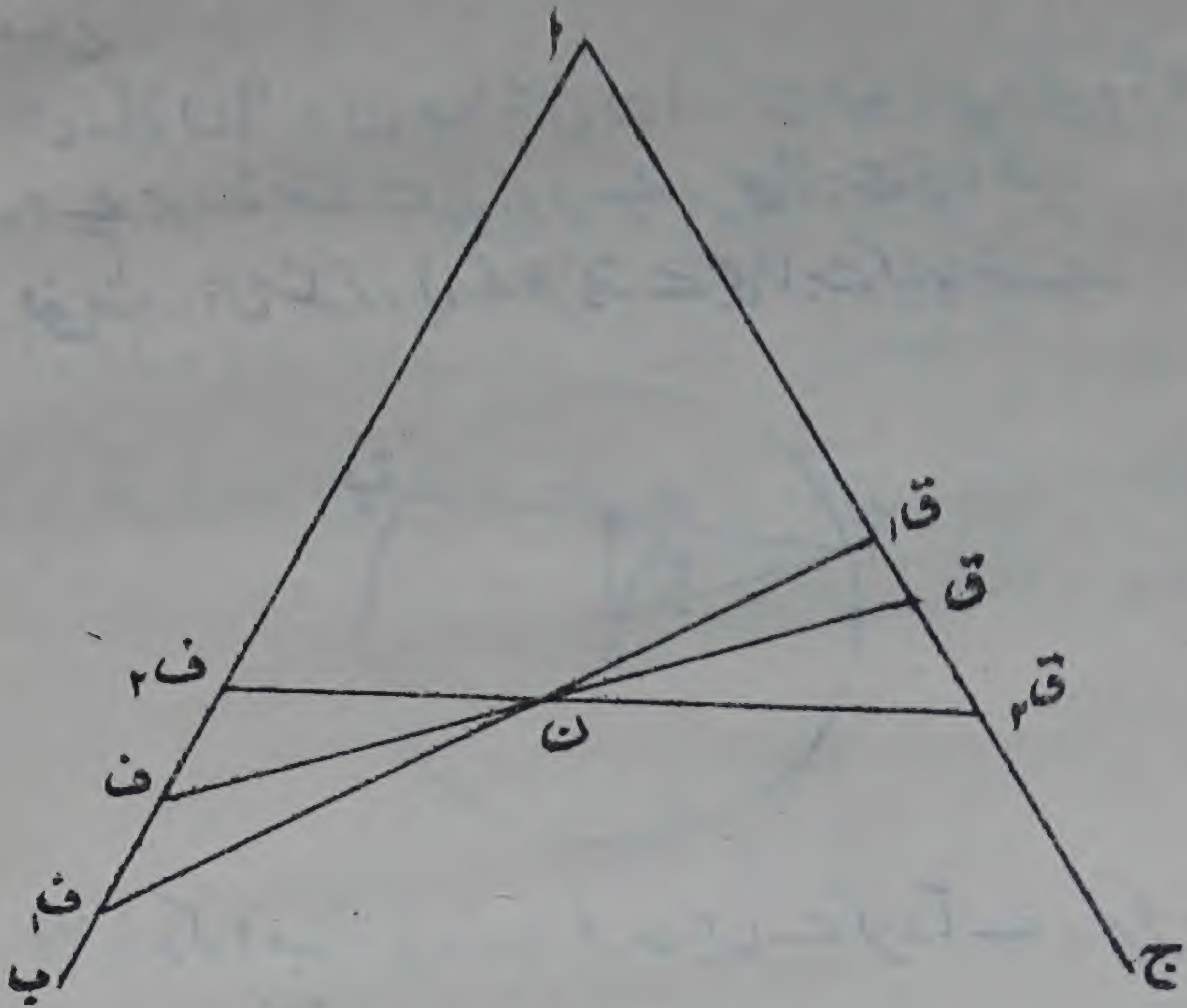
اس لیے ن ا^2 = ن ب^2 یعنی ن ا = ن ب یعنی اقل وتر ا ب کی تنصیف دیے ہوئے نقطہ ن پر ہوتی ہے - یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ - اس مسئلہ کو ذیل کے طریقہ سے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ اَبَ کوئی وتر ہے جو ن میں سے گزرتا ہے - مرکز و سے اَبَ پر عمود و ع نکالو۔

تب اَبَ = ۲ × اَع = ۲ $\sqrt{}$ر^2 - وع^2 جہاں دائرہ کا نصف قطر ر ہے - نیز قائمۃ الزاویہ △ وع ن سے ظاہر ہے کہ وع > و ن اس لیے وع کی بڑی سے بڑی قیمت اس صورت میں حاصل ہوتی ہے جبکہ اَبَ کا وسطی نقطہ ع دیے ہوئے نقطہ ن پر منطبق ہو - اور اس صورت میں ۲ $\sqrt{}$ر^2 - وع^2 کی قیمت یعنی اَبَ کی قیمت اقل ہوتی ہے - پس ثابت ہوا کہ اَبَ کا طول اقل ہوتا ہے جبکہ اَبَ کا وسطی نقطہ ن ہو۔

مشق - شکل بالا میں ثابت کرو کہ وتر ا ن ب دائرہ سے اقل رقبہ والا قطعۂ صغیر اور اعظم رقبہ والا قطعۂ کبیر قطع کرتا ہے۔

۸۷ - دو متقاطع خطوط اب، اج دیے گئے ہیں - اور ب اَ ج کے اندر ایک ثابت نقطہ ن ہے - اگر ن میں سے گزرنے والا کوئی خط خطوط اب، اج سے ف اور ق پر ملے تو مثلث ف ا ق کا رقبہ اقل ہوگا جبکہ ف ق کی تنصیف ن پر ہو۔

فرض کرو کہ $\triangle$ ا ف ق کا رقبہ اقل ہے ۔ فرض کرو کہ ف ق کے

مخالف جانب ن میں سے گزرنے والے دو قریب کے خط ف$_1$ ن ق$_1$ اور ف$_2$ ن ق$_2$ ایسے ہیں کہ مثلث ف$_1$ ا ق$_1$ کا رقبہ = مثلث ف$_2$ ا ق$_2$ کا رقبہ

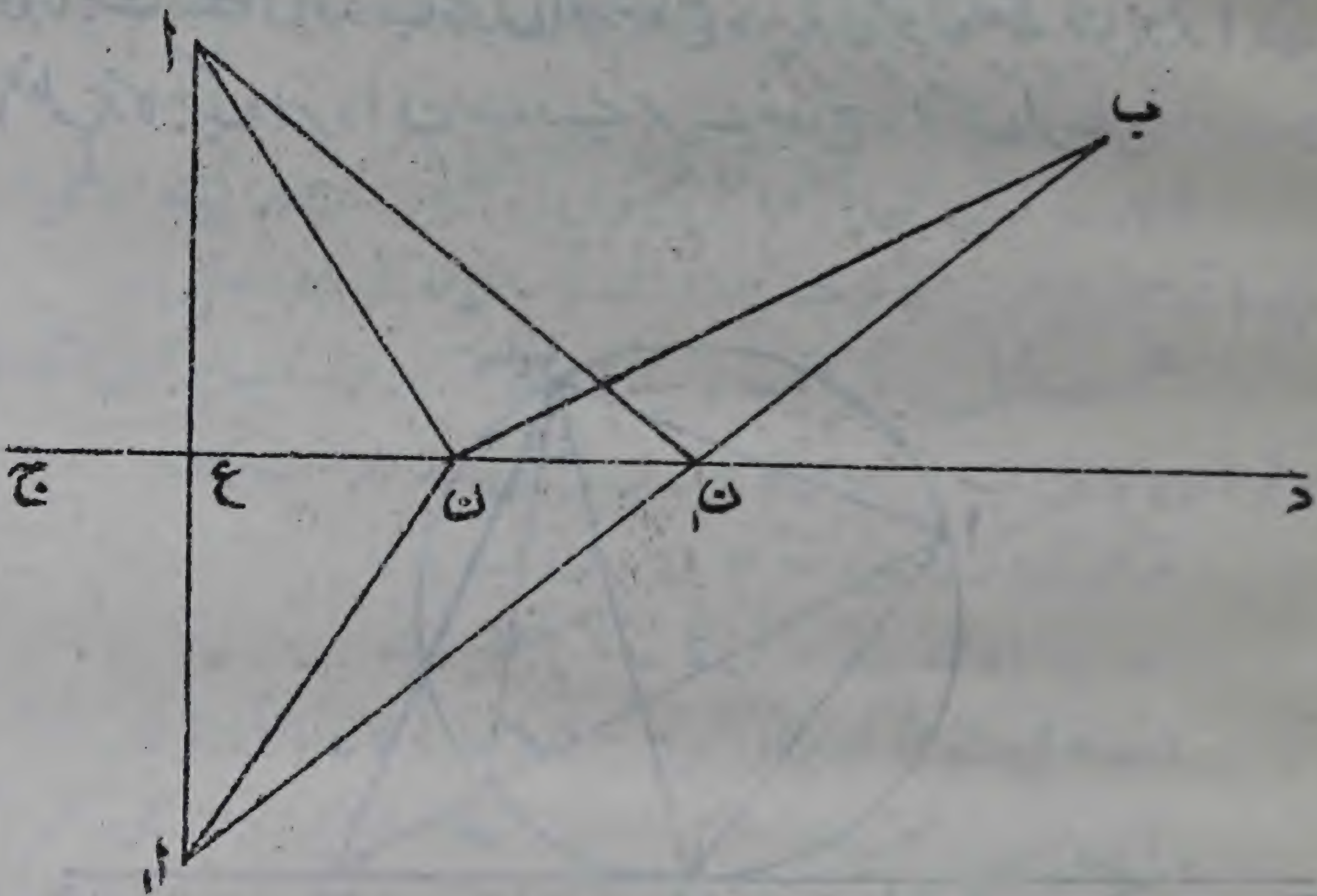
تب مثلث ف$_1$ ن ف$_2$ = مثلث ق$_1$ ن ق$_2$ اور ان مثلثات کے مشترک رأس ن پر کے زاویے مساوی ہیں ۔

اس لیے ن ف$_1$ × ن ف$_2$ = ن ق$_1$ × ن ق$_2$ اور انتہا میں جب ف$_1$ ق$_1$ اور ف$_2$ ق$_2$ دونوں خط ف ق پر منطبق ہوتے ہیں تو ن ف^2 = ن ق^2 یعنی ن ف = ن ق ۔ یہی ثابت کرنا تھا ۔

۹۰ ۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے خالص ہندسی طریقوں کی تشریح کی جائیگی ۔

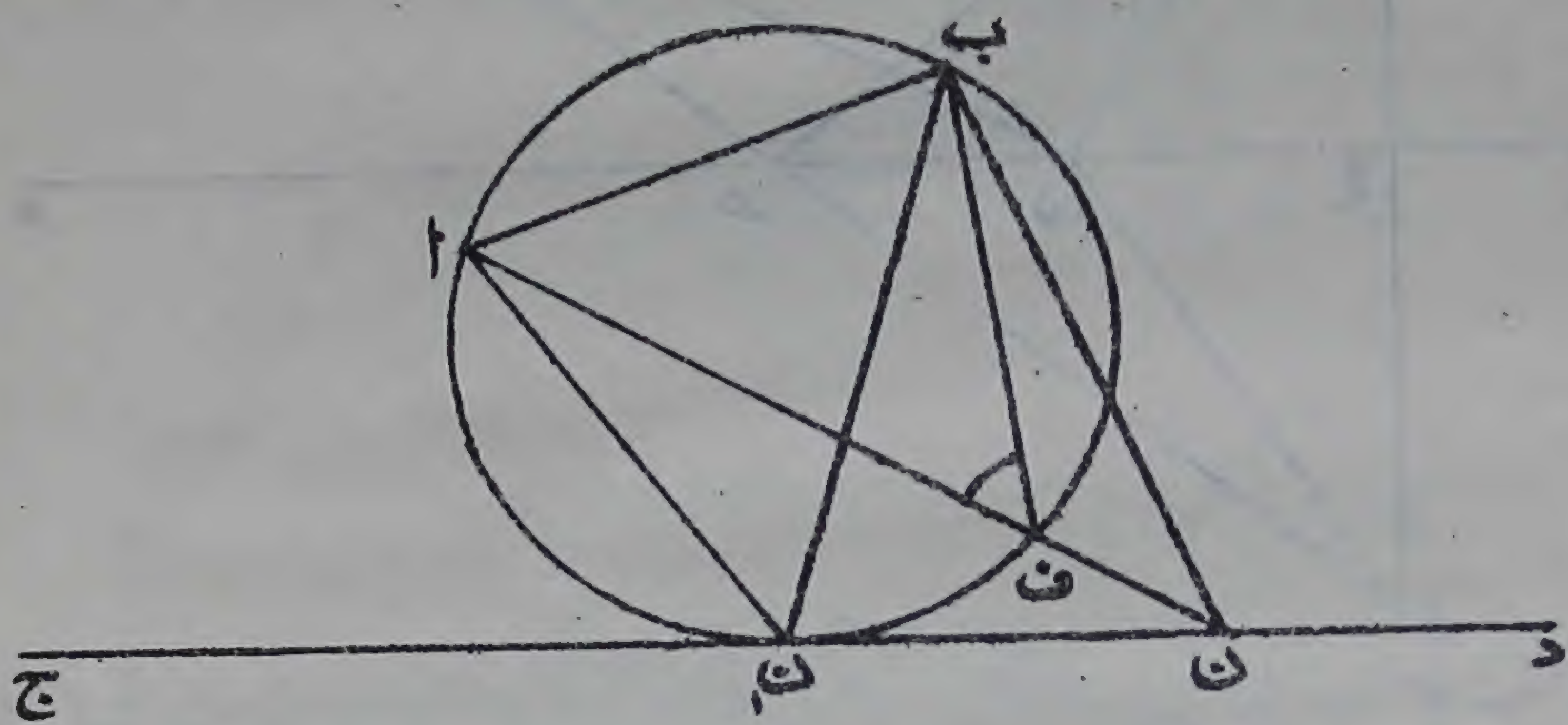
مسئلہ ۔ اگر ایک لامحدود خط ج د کی ایک ہی جانب کے دو ثابت نقطوں ا اور ب کو خط پر کے کسی نقطہ ن سے ملایا جائے تو ا ن اور ب ن کا مجموعہ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط دیے ہوئے خط ج د کے ساتھ مساوی زاویے

مخالف سمتوں میں بنائیں۔
ا سے ج د پر عمود اع نکالو اور اع ممدودہ پر نقطہ ا۱ ایسا لو کہ اع = ع ا۱

ا۱ ب کو ملاؤ جو ج د کو ن۱ پر قطع کرے۔
ج د پر کوئی نقطہ ن لو ا ن، ب ن اور ا۱ ن کو ملاؤ۔
ثابت کرو کہ (۱) ا ن۱ = ا۱ ن۱
(۲) ا ن۱ + ب ن۱ = ا۱ ب
(۳) ا ن۱̂ ج = ب ن۱̂ د
(۴) ا ن = ا۱ ن
(۵) ا ن + ب ن = ا۱ ن + ب ن > ا۱ ب
(۶) نتائج (۲) اور (۵) سے ثابت کرو کہ
ا ن۱ + ب ن۱ < ا ن + ب ن

مشق - اگر دیے ہوئے نقاط ا، ب ثابت خط ج د کے مخالف جانب واقع ہوں اور ج د پر کوئی نقطہ ن ہو تو ثابت کرو کہ ا ن ∽ ب ن اعظم ہوگا

جبکہ یہ خط دیے ہوئے خط ج د سے مساوی زاویے بنائیں۔

۸۰۔ مسئلہ ۔ ایک لامحدود ثابت خط ج د کی ایک ہی جانب دو ثابت نقطے ا اور ب ہوں اور خط ج د پر کوئی متحرک نقطہ ن ہو تو ا ن ب اعظم ہوگا جبکہ دائرہ ا ن ب دیے ہوئے خط ج د کو مس کرے۔

ب
ا
ف
ج ن، ن د

ایک دائرہ کھینچو جو ا ب میں سے گزرے اور ج د کو مس کرے۔ فرض کرو کہ نقطۂ تماس ن، ہے۔

ج د پر کوئی دوسرا نقطہ ن لو۔

ثابت کرنا ہے کہ ا ن، ب بڑا ہے ا ن ب سے

فرض کرو کہ ا ن دائرہ کو ف پر قطع کرتا ہے۔

ف ب کو ملاؤ۔

ا ن، ب = ا ف ب جو بڑا ہے ا ن ب سے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ ا ب میں سے گزرنے والے اور خط ج د کو مس کرنے والے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دوسرا دائرہ خط ج د کو ن، پر مس کرتا ہے اس صورت میں بھی ا ن، ب اعظم ہوگا۔ پس ا ن ب کی دو اعظم قیمتیں ہیں جو ن کے مقامات

ن اور ن۱ کے لیے حاصل ہوتی ہیں واضح ہو کہ بالعموم یہ دو قیمتیں مساوی نہ ہونگی۔
اگر ب ا ج دسے لا پرلے تو متحرک نقطہ ن کے مقام لا کے لیے ا ن ب
کی قیمت صفر ہے، جو زاویہ ا ن ب کی اقل قیمت ہے۔
پس ضمناً معلوم ہوا کہ دو اعظم قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اقل
قیمت واقع ہوتی ہے۔

۸۱۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے چند ایسے مسائل درج
کیے جاتے ہیں جو جبریہ متماثلات کی مدد سے بآسانی حاصل ہوئے ہیں۔

مسئلہ ۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط ا ب پر کوئی نقطہ ن
ہو تو ا ن × ن ب اعظم ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو ا ب کا۔

فرض کرو کہ ا ن = لا اور ن ب = ما
از روئے سوال لا + ما مستقل ہے
اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو ۴ لا ما = (لا + ما)۲ - (لا - ما)۲

ہمیں لا ما کی اعظم قیمت معلوم کرنا ہے، اس صورت میں ۴ لا ما بھی اعظم ہوگا۔
چونکہ اوپر کے متماثلہ میں (لا + ما)۲ مستقل ہے، اس لیے ۴ لا ما اعظم ہوگا
جبکہ (لا - ما)۲ (جو منفی نہیں ہوسکتا) اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت یعنی قیمت
صفر اختیار کرے۔

یعنی جبکہ لا = ما
یعنی ا ن = ن ب　　یہی ثابت کرنا تھا۔

۸۲۔ **مسئلہ** ۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط ا ب پر کوئی
نقطہ ن ہو تو ا ن۲ + ن ب۲ اقل ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو ا ب کا۔

فرض کرو کہ ا ن = لا　اور ن ب = ما
از روئے سوال لا + ما مستقل ہے
اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو۔

۲ (لا۲ + ما۲) = (لا + ما)۲ + (لا - ما)۲

بائیں جانب میں (لا + ما)۲ مستقل ہے اور (لا - ما)۲ منفی نہیں ہوسکتا ہے

اس لیے ۲ (لا^2 + ما^2) کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو گی جبکہ بائیں جانب کی دوسری رقم (لا ۔ ما)^2 اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر اختیار کرے یعنی جبکہ لا = ما

یعنی ان = ن ب جو ثابت کرنا تھا۔

مسئلہ ۲۰

(۱) ایک دیئے ہوئے ثابت نقطہ سے ایک دیے ہوئے ثابت خط تک خطوط کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان خطوط میں سے سب سے چھوٹا خط وہ ہے جو دیئے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۲) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے دائرہ کے محیط تک کھینچے ہوئے خطوط میں سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے وہ خط ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا بڑے سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۴) مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

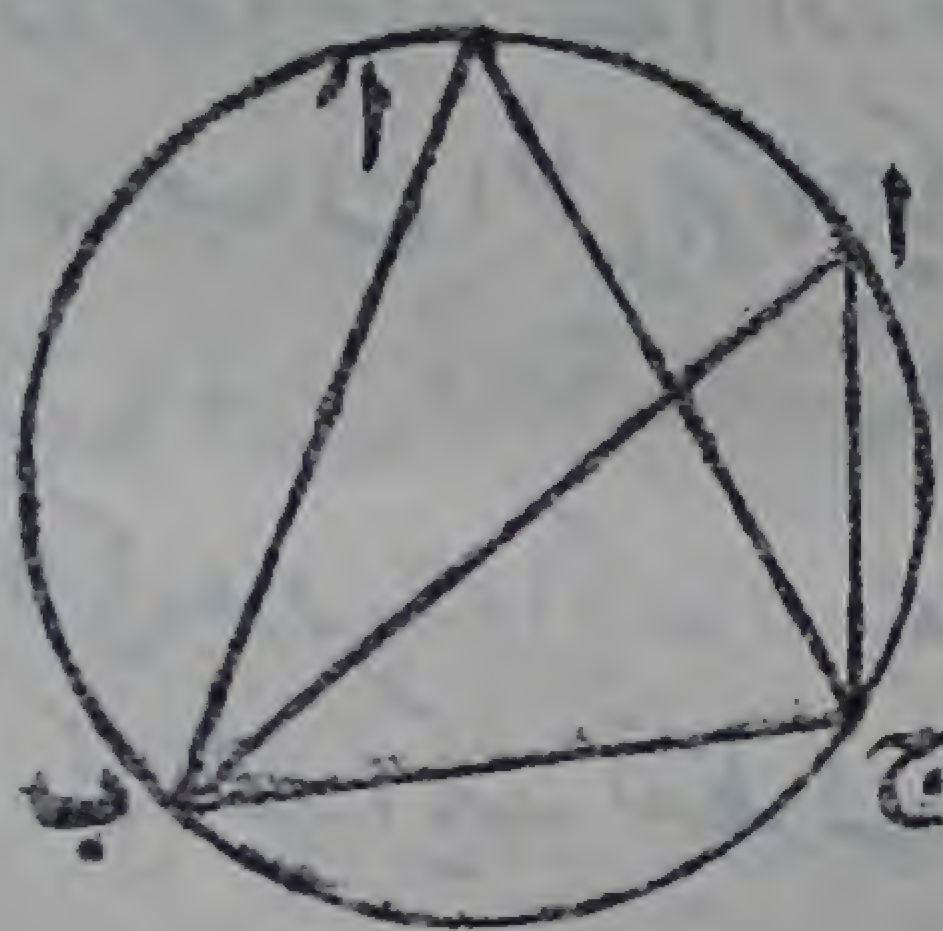
(۵) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ اعظم ہو گا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

(۶) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے احاطہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۷) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے وتر والا مستطیل مربع ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ اُن سب مثلثوں میں جن کا قاعدہ اور رقبہ معلوم ہے مثلث متساوی الساقین کا محیط اقل ہے۔

(۹) دو سیدھی پٹریاں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں اور ایک سیدھی سلاخ ان کے درمیان پھسلتی ہے بتاؤ کہ پھسلنے والی سلاخ کے کس مقام کے لیے

پٹڑیوں اور سلاخ سے بننے والے مثلث کا رقبہ اعظم ہے۔
(۱۰) ثابت کرو کہ ایک دیئے ہوئے دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلثوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔
حل۔ فرض کرو کہ دیئے ہوئے دائرہ (و) کے اندر بنا ہوا کوئی مثلث اب ج ہے جو مساوی الاضلاع نہیں ہے۔ فرض کرو کہ اب ≠ اج۔

تب راس ا کو قوس ب ا ج کے وسطی نقطہ اَ پر لینے سے دائرہ کے اندر بنا ہوا △ اَ ب ج حاصل ہوتا ہے جس کا رقبہ بڑا ہے △ اب ج کے رقبہ سے۔ یعنی دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلث کے رقبہ میں اضافہ ممکن ہے اگر مثلث مساوی الاضلاع نہ ہو۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلثوں میں اعظم رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔
نوٹ۔ مندرجہ بالا استدلال میں دائرہ کے اندر بنے ہوئے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کا مقابلہ دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایسے مثلث سے جو مساوی الاضلاع نہ ہو نہیں کیا گیا ہے بلکہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث کے رقبہ میں اضافہ ممکن ہے اگر مثلث مساوی الاضلاع نہ ہو۔
یہ نہایت ضروری ہے کہ اس استدلال کی نوعیت کو طالب علم اچھی طرح سمجھے۔
(۱۱) ایک پل کی تین کمانیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا عرض ۵۰ فٹ ہے۔ بتاؤ کہ پل سے کتنے فاصلہ پر کسی ایک کنارے پر وہ نقطہ ہے جہاں درمیانی کمان کے محاذی اعظم زاویہ بنتا ہے۔ [جواب ۸۶٫۶ فٹ]
(۱۲) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک دیئے ہوئے دائرہ کے اندر

بن سکتے ہیں مثلث مساوی الاضلاع کا محیط اعظم ہے۔

(۱۳) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں مثلث پایئن کا احاطہ اقل ہے۔

(۱۴) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں پر کا مجموعہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

(۱۵) ایک دائرہ کے باہر دو نقطے ا اور ب ہیں اور دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے ثابت کرو کہ ا ن + ب ن اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط ن پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

(۱۶) مثال بالا کی مدد سے ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج (جس کے سب زاویے حادّہ ہیں) کے اندر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ن ا + ن ب + ن ج اقل ہو۔

(۱۷) ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چاروں ضلعے بلحاظ طول و ترتیب دیے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ ذو اربعۃ الاضلاع مشترک المحیط ہو۔

ساتواں باب

چلیپی نسبت' موسیقی صف اور موسیقی پنسل

(۸۳) جدید علم ہندسہ میں ایک خطِ مستقیم پر طولوں کی پیمائش میں سمتِ پیمائش کو بھی ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو مثبت قرار دیا جائے تو مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار دیا جائیگا۔ پس اگر خط پر ا اور ب دو نقطے ہوں تو اب = ۔ ب ا اور ب ا = ۔ اب جس سے حاصل ہوتا ہے کہ اب + ب ا = ۰
اگر ایک خطِ مستقیم پر تین نقطے ا' ب' ج ہوں تو

اب + ب ج = اج اور اب + ب ج + ج ا = ۰

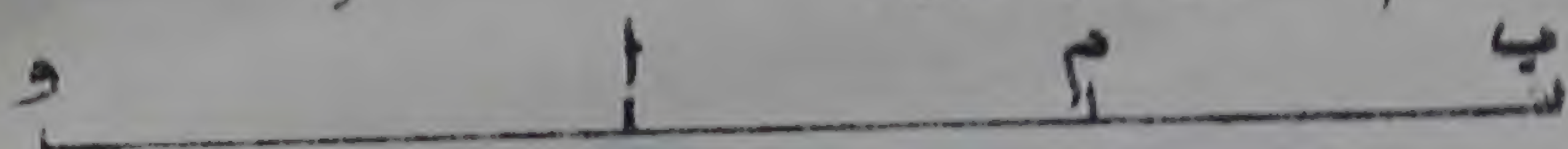
نیز اگر دو نقطوں ا اور ب میں سے گزرنے والے خط پر کوئی نقطہ و ہو تو و ب ۔ و ا = اب

و ا ب

ا و ب

ا ب و

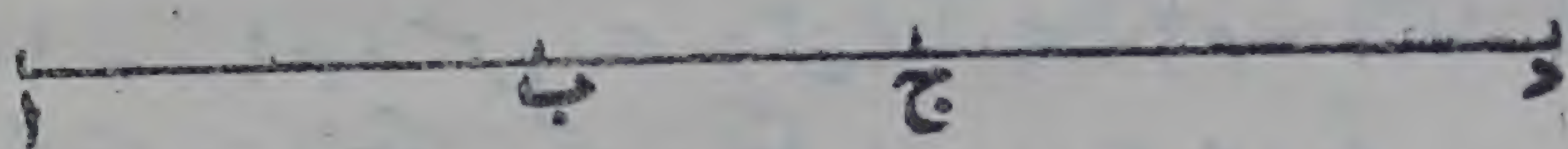
۸۴ ۔ مسئلہ ۔ اگر خطِ مستقیم کا وسطی نقطہ م ہو اور خط پر کوئی نقطہ و ہو تو ۲ و م = و ا + و ب

ب م ا و

ثبوت ۔ چونکہ ا م = م ب
اس لیے و م ۔ و ا = و ب ۔ و م
اس لیے ۲ و م = و ا + و ب

۸۵ ۔ تعریف ۔ متعدد ہم خط نقطوں کو نقطوں کی صف کہتے ہیں ۔

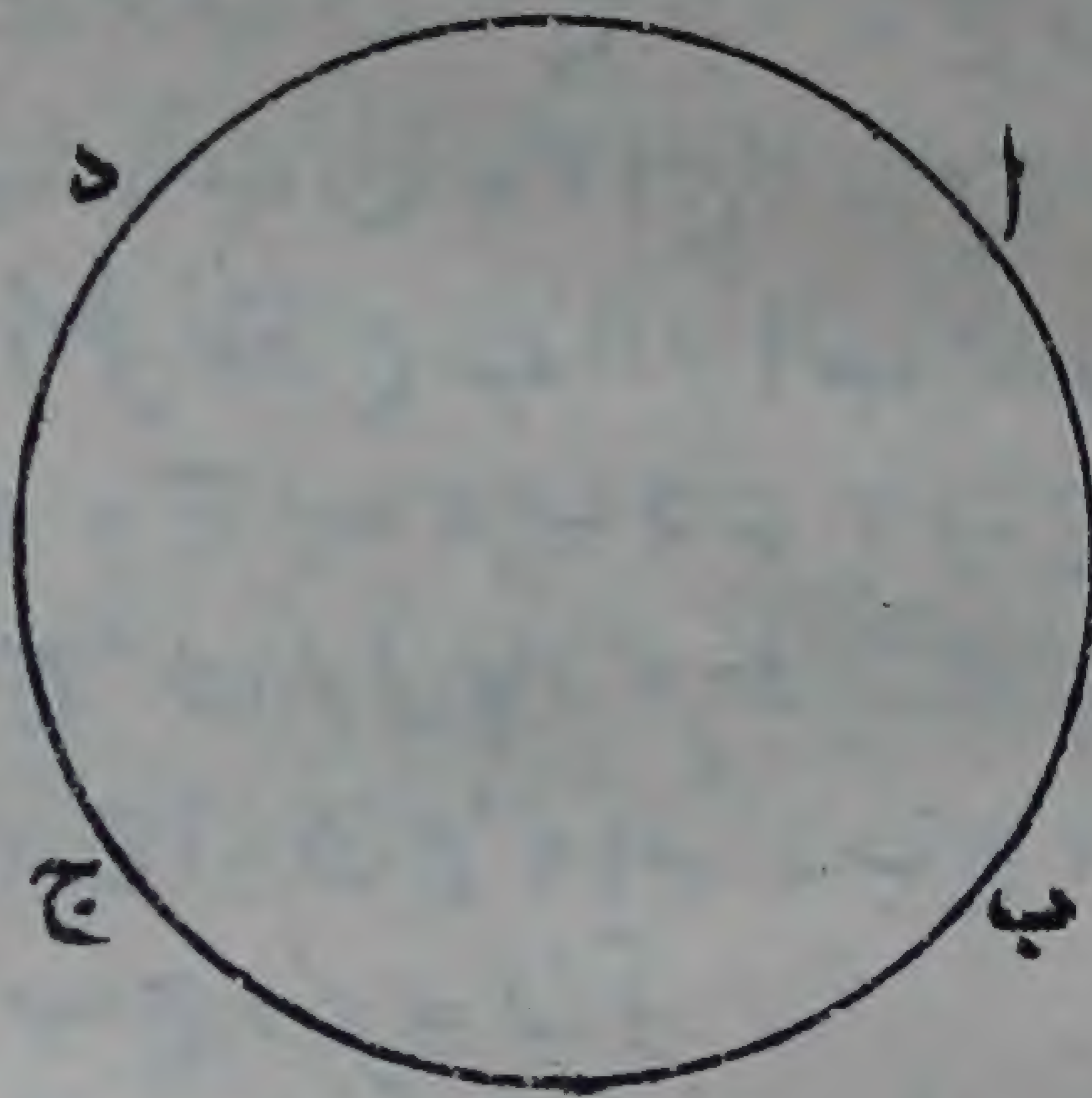
مسئلہ ۔ اگر ا ، ب ، ج ، د چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

ا ب × ج د + ب ج × ا د + ج ا × ب د = ۰

د ج ب ا

ا ب × ج د + ب ج × ا د + ج ا × ب د "
= ا ب (ا د ۔ ا ج) + (ا ج ۔ ا ب) ا د ۔ ا ج (ا د ۔ ا ب) = ۰

نوٹ ۔ یہ مسئلہ درست ہے خواہ ا ، ب ، ج ، د ایک خط پر کسی ترتیب میں لیے جائیں ۔

۸۶ ۔ تعریف ۔ اگر ا ، ب ، ج ، د چار نقطوں کی ایک صف ہو تو نسبت $\frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}}$ کو صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اس کی قیمت کو علامت (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں ۔

نوٹ ۔ صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت کو لکھنے اور یاد رکھنے کے لئے ایک دائرہ پر نقاط ا ، ب ، ج ، د کو سلسلہ وار سمتِ ساعت میں لکھو ۔ شمار کنندہ حاصل کرنے کے لیے ا سے شروع کر کے حروف کو سمتِ ساعت میں لکھو

اور نسب نما حاصل کرنے کے لیے ا سے شروع کرکے حروف کو مخالف سمتِ ساعت میں لکھو۔

۸۷۔ مسئلہ۔ اگر (ا ب ج د) = (ا ب ج ع) تو نقاط د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہونگے۔

چونکہ (ا ب ج د) = (ا ب ج ع)

$$\therefore \quad \frac{\text{اب} \times \text{جد}}{\text{اد} \times \text{جب}} = \frac{\text{اب} \times \text{جع}}{\text{اع} \times \text{جب}}$$

یعنی

$$\frac{\text{جد}}{\text{اد}} = \frac{\text{جع}}{\text{اع}}$$

یعنی

$$\frac{\text{جد}}{\text{دا}} = \frac{\text{جع}}{\text{عا}}$$

یعنی ج ا کی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط د اور ع پر ہوتی ہے اس لیے ضروری ہے کہ د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں۔

امثلہ ۲۱

(۱) ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور ا ب پر کوئی اور نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ

(ا) ان × ب ن + ج ب² = ج ن²

(ب) اب² + ب ن² = ۲ اج² + ۲ ج ن²

(۲) اب کا وسطی نقطہ ج ہے اور اب ممدودہ پر کوئی نقطہ د ہے
ثابت کرو کہ اج × اد = ج ب × ب د + ۲ ب ج²

(۳) ا، ب، ج، ن کوئی چار ہم خط نقطے ہیں۔ ثابت کرو کہ
ن ا² × ب ج + ن ب² × ج ا + ن ج² × اب + ب ج × ج ا × اب = ۰

(۴) اگر (اب ج د) = لہ تو
ثابت کرو کہ (اب ج د) کی قیمت نہیں بدلتی جبکہ کسی دو حروف کو باہم بدلا جائے اور ساتھ ہی باقی دو حروف کو بھی باہم بدلا جائے یعنی

(اب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا) = لہ

(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا دوسرے اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت الٹ جاتی ہے یعنی

(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د ا ب ج) = ۱/لہ

(۶) ثابت کرو کہ دوسرے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا پہلے اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت ۱ ـ لہ ہو جاتی ہے یعنی

(اج ب د) = (ب د ا ج) = (ج ا د ب) = (د ب ج ا) = ۱ ـ لہ

اشارہ۔ چونکہ اب × ج د + ب ج × ا د + ج ا × ب د = ۰

اس لیے　اب × ج د / ا د × ج ب　ـ ۱ +　ج ا × ب د / ا د × ج ب　= ۰

اس لیے ۱ ـ لہ = اب × ج د / ا د × ج ب ... = اج × ب د / ا د × ب ج = (اج ب د)

اسی طرح سے باقی کی تین چلیپی نسبتوں کے لیے بھی۔

(۷) ثابت کرو کہ

(ا) (ا د ب ج) = (ب ج ا د) = (ج ب د ا) = (د ا ج ب) = ۱/(۱ ـ لہ)

(ب) (اب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب) = ۱ ـ ۱/لہ = (لہ ـ ۱)/لہ

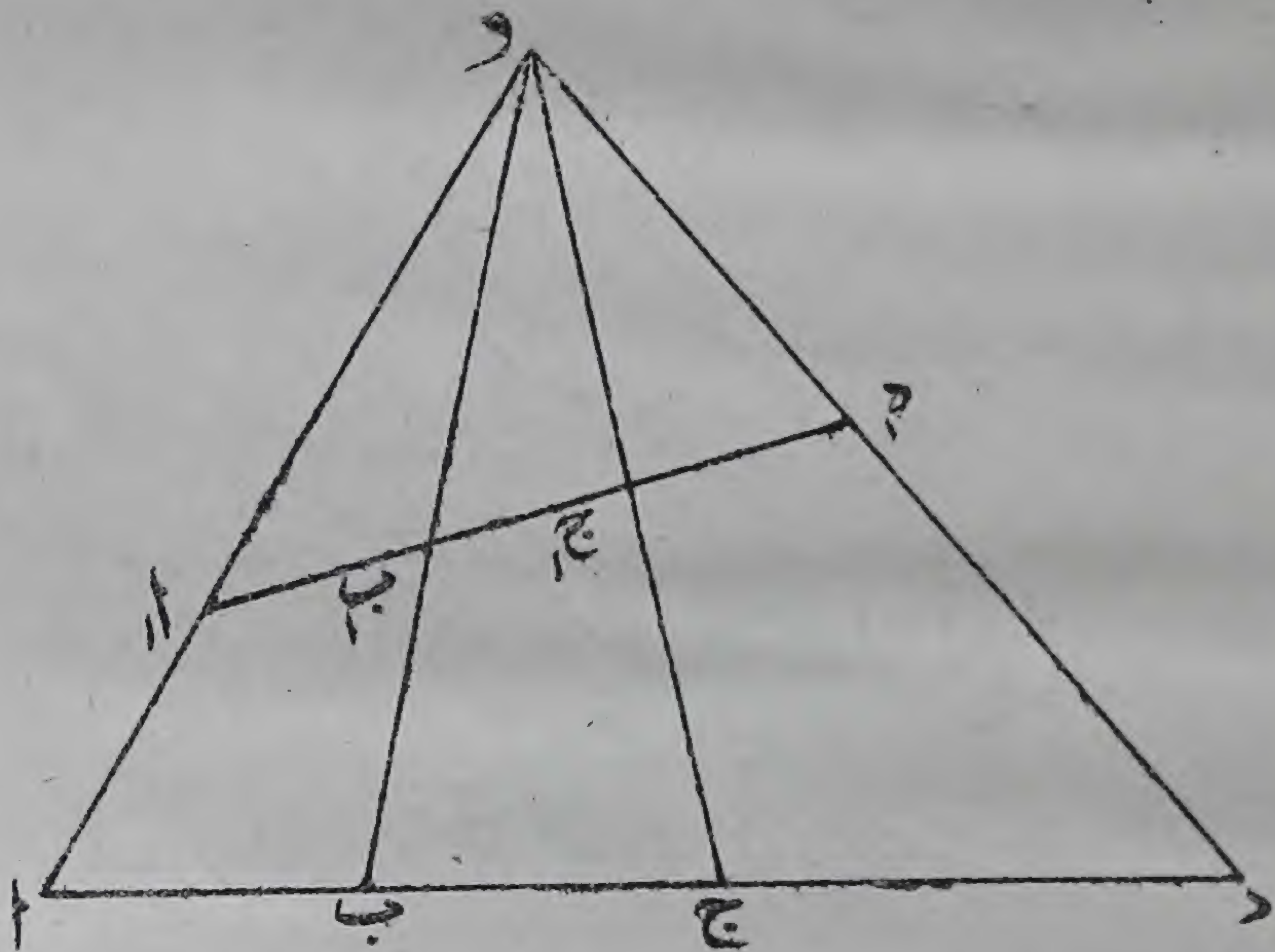
(ج) (ا ج د ب) = (ب د ج ا) = (ج ا ب د) = (د ب ا ج) = لیہ ۱

(۸) ثابت کرو کہ چار ہم خط نقطوں ا، ب، ج، د کو مختلف ترتیبوں میں لینے سے ۲۴ چلیپی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار چار مساوی القیمت چلیپی نسبتوں کے چھ سٹ (Set) بنتے ہیں۔

۸۸۔ تعریفات۔ متعدد متراکز خطوں کو خطوں کی پنسل کہتے ہیں۔ اور پنسل کے ہر خط کو شعاع کہتے ہیں اور پنسل کی شعاعوں کے نقطۂ تراکز کو پنسل کا راس کہتے ہیں۔

پنسل کی شعاعوں کو کاٹنے والے کسی خط کو پنسل کا قاطع کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر چار شعاعوں و ا، و ب، و ج، و د سے بننے والی ایک پنسل کو دو قاطع بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د اور ا، ب، ج، د پر قطع کریں تو (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

(ا ب ج د) = (ا ب × ج د) / (ا د × ج ب) = (△ ا و ب × △ ج و د) / (△ ا و د × △ ج و ب)

= (½ و ا × و ب × جب ا و̂ ب × ½ و ج × و د × جب ج و̂ د) / (½ و ا × و د × جب ا و̂ د × ½ و ج × و ب × جب ج و̂ ب)

جہاں زاویوں کی علامتوں کو بھی ملحوظ رکھا گیا ہے۔

$$= \frac{\text{جب ا}\hat{\text{و}}\text{ب} \times \text{جب ج}\hat{\text{و}}\text{د}}{\text{جب ا}\hat{\text{و}}\text{د} \times \text{جب ج}\hat{\text{و}}\text{ب}}$$

اسی طرح سے (ا۱ ب۱ ج۱ د۱) $= \frac{\text{جب ا۱ و ب۱} \times \text{جب ج۱ و د۱}}{\text{جب ا۱ و د۱} \times \text{جب ج۱ و ب۱}}$

چونکہ پنسل کے قاطعوں کے تمام مقامات کے لیے

$$\frac{\text{جب ا و ب} \times \text{جب ج و د}}{\text{جب ا و د} \times \text{جب ج و ب}} = \frac{\text{جب ا۱ و ب۱} \times \text{جب ج۱ و د۱}}{\text{جب ا۱ و د۱} \times \text{جب ج۱ و ب۱}}$$

اس لیے ثابت کرو کہ (ا ب ج د) = (ا۱ ب۱ ج۱ د۱)

نوٹ (۱)۔ یہ طریقہ اُن صورتوں پر بھی حادی ہے جبکہ قاطع پنسل کی ایک یا ایک سے زیادہ ممدودہ شعاعوں کو قطع کرے۔ قاطع کے مختلف مقامات کے لیے طالب علم مناسب شکلیں کھینچ کر ثبوت بہم پہنچائے۔

نوٹ (۲)۔ مسئلۂ بالا میں یہ ثابت ہوا کہ اگر چار شعاعوں و ا، و ب، و ج، و د سے بننے والی پنسل کو کوئی قاطع نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرے تو صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت قاطع کے مقام پر منحصر نہیں ہے بلکہ پنسل کی شعاعوں کے درمیانی زاویوں پر منحصر ہے۔ اس مستقل چلیپی نسبت کو پنسل کی چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اُسے علامت و (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

۸۹۔ تعریفات۔ اگر ایک خطِ مستقیم ا ج کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت میں ب اور د پر کی جائے [یعنی اگر $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} = -\frac{\text{ا د}}{\text{د ج}}$] تو یوں کہا جاتا ہے کہ ا ج کی موسیقی تقسیم ب اور د پر ہوئی ہے۔ اور صف ا ب ج د کو

ا ب ج د

موسیقی صف کہتے ہیں نیز نقاط ا اور ج کے لحاظ سے نقاط ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج کہلاتے ہیں۔

موسیقی صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت $= \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}}$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} \div \frac{\text{ا د}}{\text{د ج}} = -1$$

پس صف اب ج د موسیقی صف ہو گی اگر اُس کی چلیپی نسبت (اب ج د) = -۱
یعنی وہ صف جس کی چلیپی نسبت -۱ کے مساوی ہے موسیقی صف ہے۔
یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ ا اور ج کے لحاظ سے ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج ہیں موسیقی صف اب ج د کو (اج، ب د) = -۱ سے بھی تعبیر کرتے ہیں۔

۹۰۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = -۱ تو (د ب، ج ا) = -۱

از روئے تعریف $\frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = -\frac{\text{اد}}{\text{د ج}}$

اس لیے تبدیل نسبت سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{د ج}}{\text{ب ج}} = -\frac{\text{اد}}{\text{اب}}$$

یعنی $\frac{\text{د ج}}{\text{ج ب}} = -\frac{\text{دا}}{\text{اب}}$

یعنی (د ب، ج ا) = -۱

۹۱۔ مسئلہ۔ اگر (اب ج د) = -۱ تو اب، اج، اد کے طول موسیقی سلسلہ میں ہونگے

چونکہ (اب ج د) = -۱

اس لیے $\frac{\text{اب} \times \text{ج د}}{\text{اد} \times \text{ج ب}} = -1$

یعنی $\frac{\text{اب}\,(\text{اد} - \text{اج})}{\text{اد}\,(\text{اج} - \text{اب})} = -1$

یعنی اب × اد - اب × اج = - اد × اب + اد × اج

طرفین کو اب × اج × اد پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{\text{اج}} - \frac{1}{\text{اد}} = -\frac{1}{\text{اج}} + \frac{1}{\text{اب}}$$

یعنی $\frac{1}{\text{اب}} - \frac{1}{\text{اج}} = \frac{1}{\text{اج}} - \frac{1}{\text{اد}}$

یعنی $\frac{1}{\text{اب}}$، $\frac{1}{\text{اج}}$، $\frac{1}{\text{اد}}$ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی طول اب، اج، اد موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

۹۲۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = −۱ اور ب د کا وسطی نقطہ و ہو تو $\text{وا} \times \text{وج} = \text{وب}^2$

چونکہ (اج، ب د) = −۱

اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{بج}} = -\frac{\text{اد}}{\text{دج}}$

یعنی $\frac{\text{وب} - \text{وا}}{\text{وج} - \text{وب}} = -\frac{\text{ود} - \text{وا}}{\text{وج} - \text{ود}}$

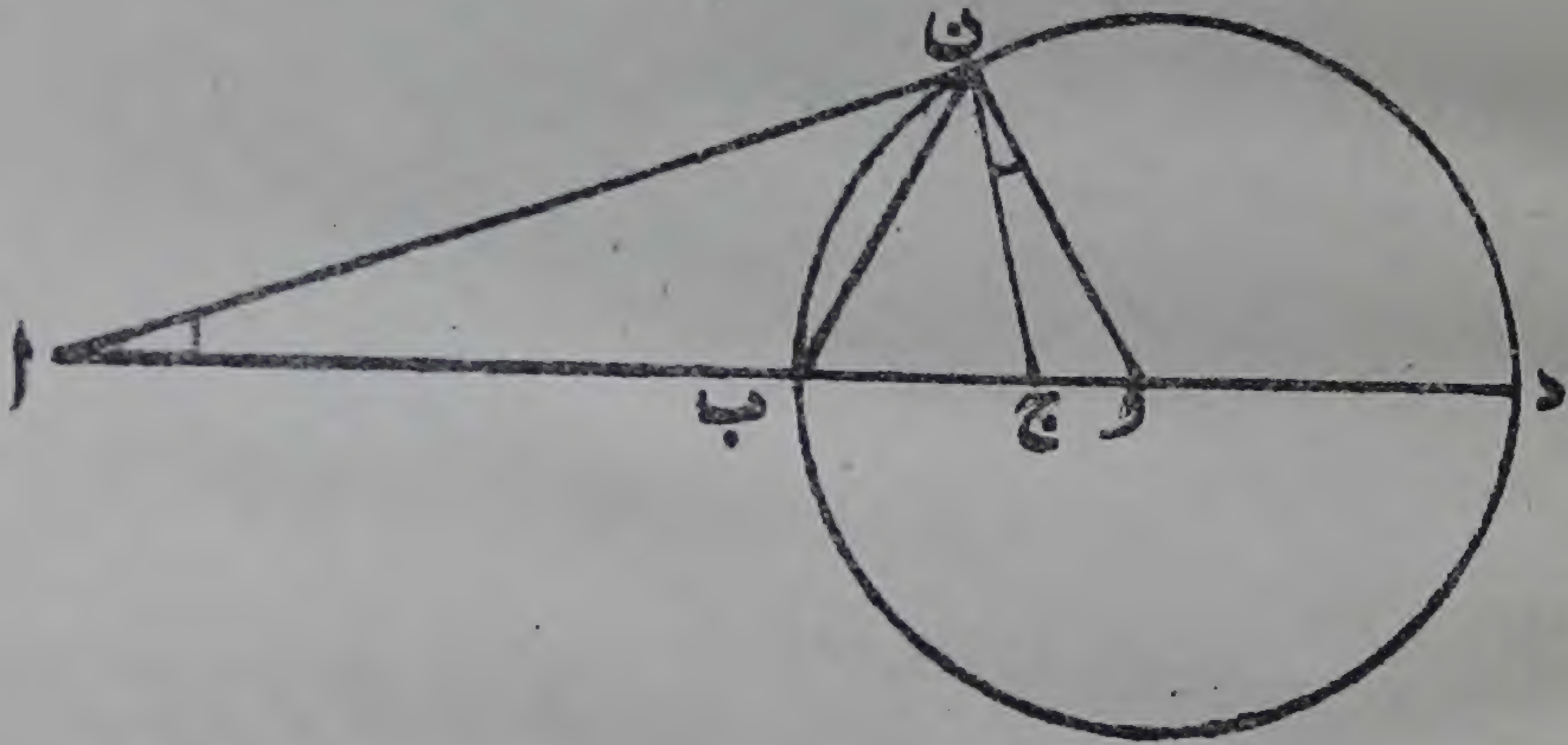
یعنی $\frac{\text{وب} - \text{وا}}{\text{وج} - \text{وب}} = \frac{\text{وب} + \text{وا}}{\text{وج} + \text{وب}}$ کیونکہ ود = − وب

یعنی $\frac{\text{وج} + \text{وب}}{\text{وج} - \text{وب}} = \frac{\text{وب} + \text{وا}}{\text{وب} - \text{وا}}$ (تبدیل نسبت)

یعنی $\frac{\text{وج}}{\text{وب}} = \frac{\text{وب}}{\text{وا}}$ (ترکیب و تفصیل نسبت)

یعنی $\text{وا} \times \text{وج} = \text{وب}^2$

۹۳۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = −۱ اور قطر ب د پر کھنچے ہوئے دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہو تو $\frac{\text{نا}}{\text{نج}} = \frac{\text{اب}}{\text{بج}}$

فرض کرو کہ ب د کا وسطی نقطہ و ہے
ن ا، ن ب، ن ج، ن و کو ملاؤ

سابقہ مسئلہ کی رو سے

و ا × و ج = و ب^2

= و ن^2

یعنی و ن مماس ہے △ ا ن ج کے حائط دائرہ کا

یعنی و ن̂ ج = ن اَ ب .... (۱)

چونکہ و ب = و ن

اس لیے و ن̂ ب = و ب̂ ن

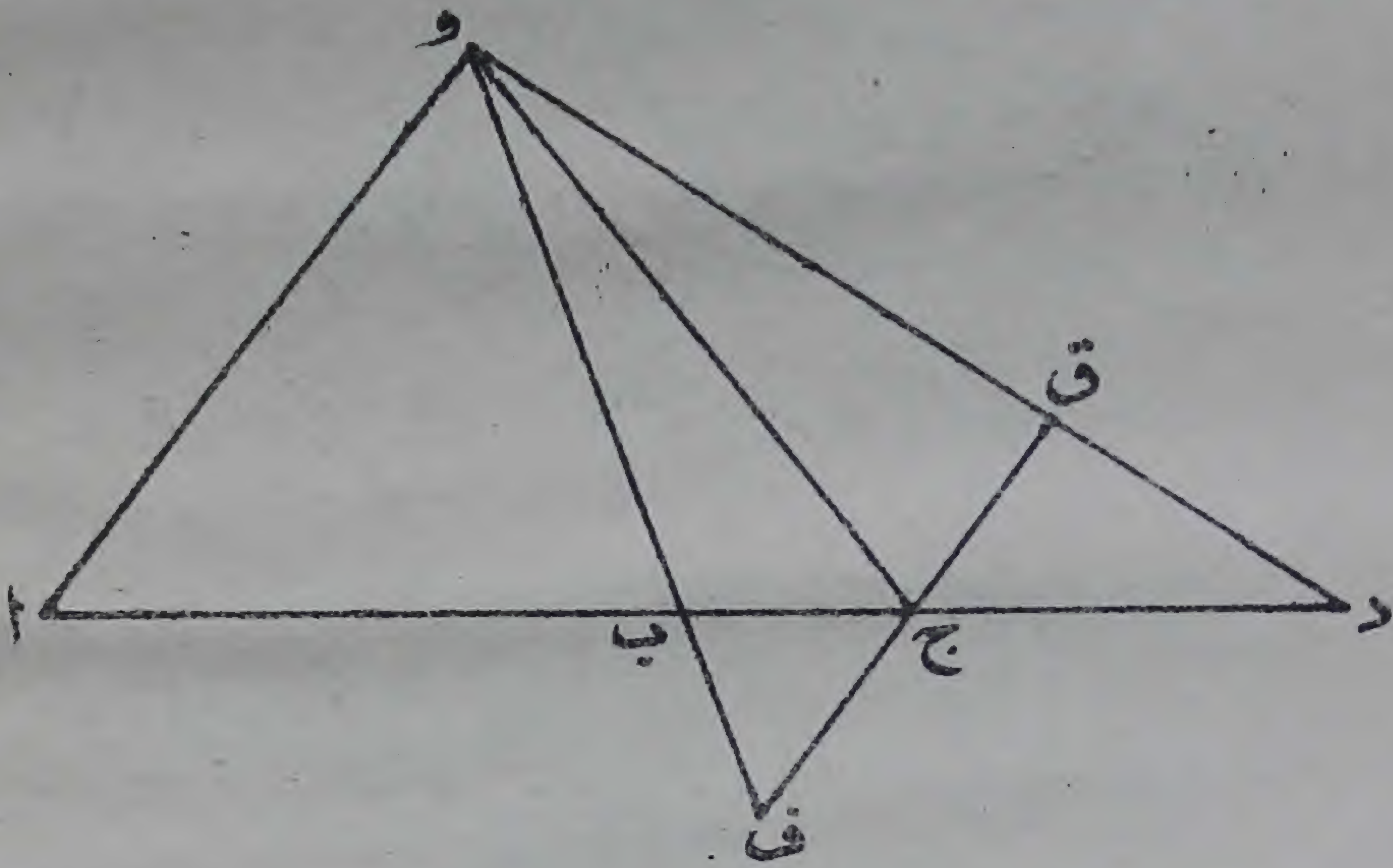
یعنی و ن̂ ج + ج ن̂ ب = ن اَ ب + ا ن̂ ب .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

ج ن̂ ب = ا ن̂ ب

یعنی ن ب داخلی منصّف ہے ا ن̂ ج کا

اس لیے $\frac{\text{ن ا}}{\text{ن ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}}$، یہی ثابت کرنا تھا۔

۹۴ مسئلہ ۔ اب ج د ایک موسیقی صف ہے اس کے باہر کوئی نقطہ و ہے ۔ اگر ج میں سے ایک خط ف ج ق خط و ا کے متوازی کھینچا جائے جو و ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے تو ف ج = ج ق ۔

متشابہ مثلثوں اب و اور ج ب ف میں

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا و}}{\text{ف ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

نیز متشابہ مثلثوں ا د و اور ج د ق میں

$$\frac{\text{ا د}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ا و}}{\text{ج ق}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

لیکن چونکہ اب ج د موسیقی صف ہے

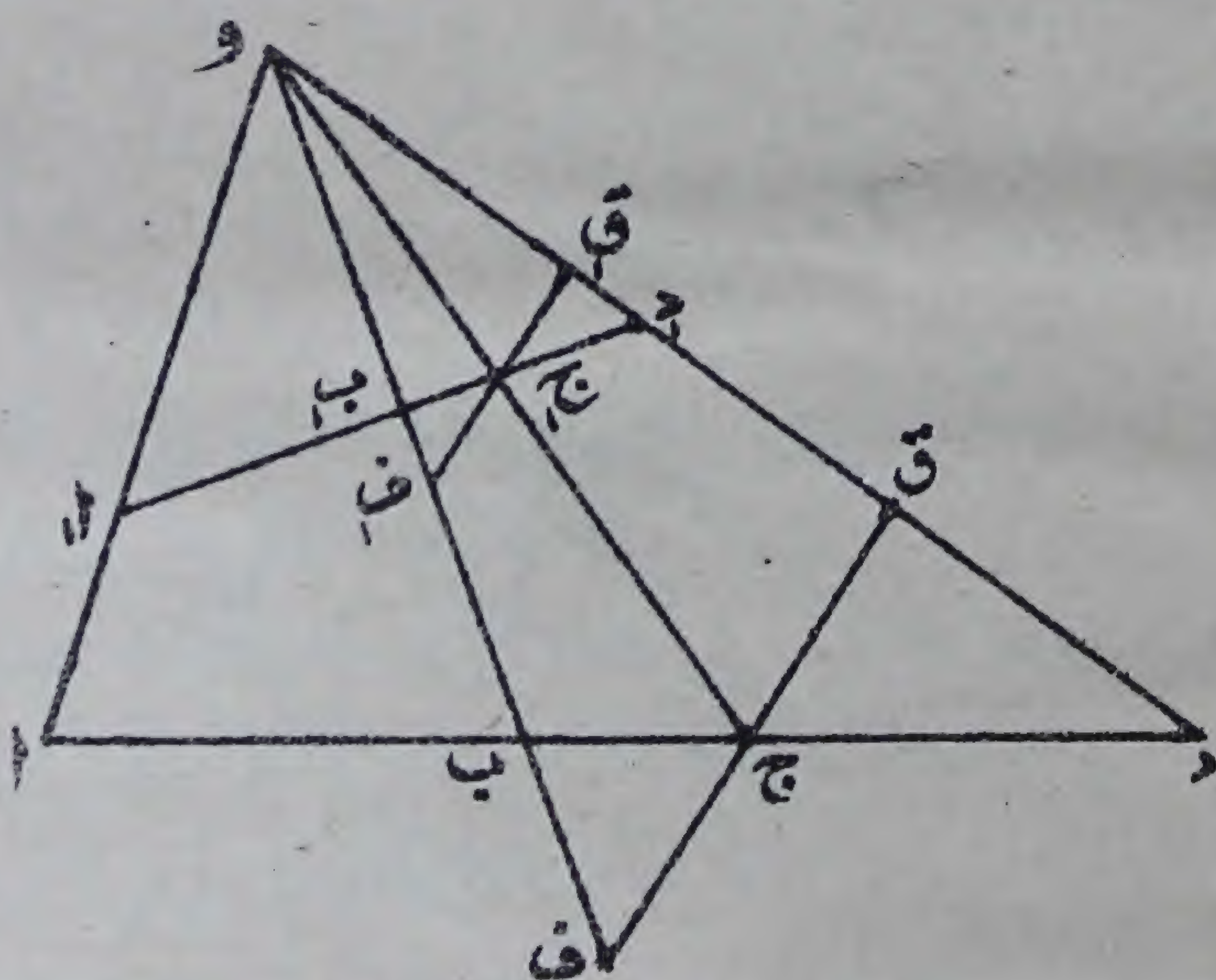
اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ج د}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$

نتائج (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ا و}{ف ج} = \frac{ا و}{ج ق}$$

اس لیے　ف ج = ج ق

عکس ۔ اگر ا ب ج د ایک صف ہو اور اس کے باہر ایک نقطہ و ہو اور ج سے و ا کے متوازی ایک خط ف ج ق کھینچا جائے جو و ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے اور اگر ف ج = ج ق تو ا ب ج د ایک موسیقی صف ہوگی ۔
اس مسئلہ کا ثبوت اوپر کے مسئلہ کے ثبوت کے استدلال کو الٹنے سے طالب علم خود حاصل کرے ۔

۹۵ ۔ مسئلہ ۔ اگر ا ب ج د ایک موسیقی صف ہو اور اس کے باہر کوئی نقطہ و ہو تو و ا، و ب، و ج، و د ہر قاطع کو ایک موسیقی صف پر قطع کرینگے ۔

فرض کرو کہ کوئی دوسرا قاطع خطوط و ا، و ب، و ج، و د کو بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے۔

نقاط ج اور ج میں سے خطوط ف ج ق اور ف ج ق خط و ا کے متوازی کھینچو۔

چونکہ (ا ب ج د) ایک موسیقی صف ہے اس لیے ف ج = ج ق

اس لیے ف ج = ج ق

اور دفعہ گزشتہ کے مسئلہ کے عکس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا، ب، ج، د ایک موسیقی صف ہے۔

تعریفات۔ اگر پنسل و (ا ب ج د) ایسی ہو کہ اس کے ایک مخصوص قاطع (اور اس لیے مسئلۂ بالا کی رو سے اس کے ہر قاطع پر) ایک موسیقی صف حاصل ہوتی ہو تو ایسی پنسل کو موسیقی پنسل کہتے ہیں۔ اور شعاعوں و ب، و د کو بلحاظ شعاعوں و ا، و ج کے ایک دوسرے کی موسیقی مزدوج شعاعیں کہتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ گزشتہ ترقیم کے اصول پر موسیقی پنسل و (ا ب ج د) کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

و (ا ب ج د) = -۱ یا و (ا ج، ب د) = -۱

نوٹ (۲)۔ دفعہ ۸۸ کے مسئلہ کی رو سے (ا ب ج د) = (ا، ب، ج، د) اور چونکہ حسب مفروض (ا ب ج د) = -۱ اس لیے ثابت ہوا کہ (ا، ب، ج، د) = -۱

یہ مسئلۂ بالا کا متبادل ثبوت ہے۔

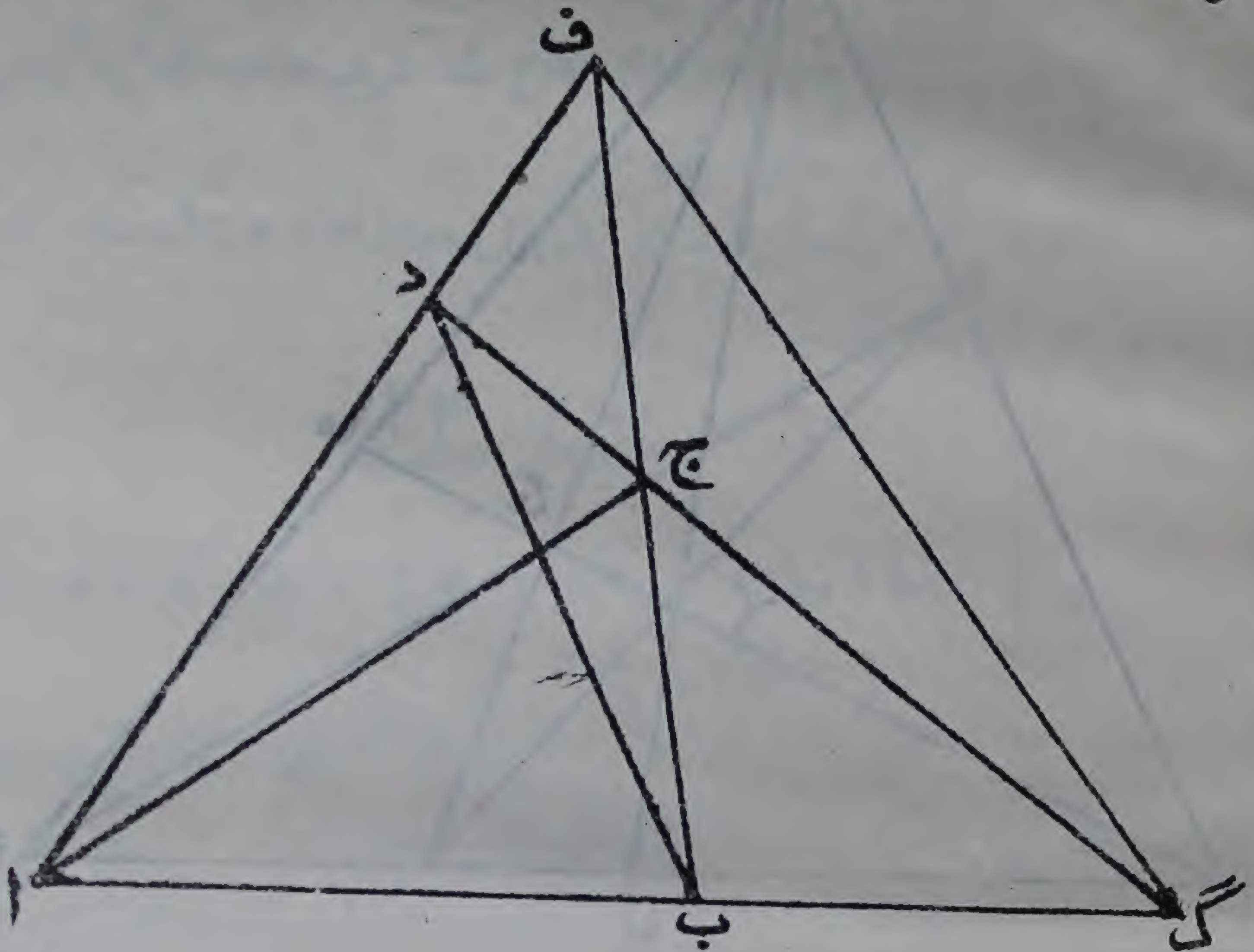
تعریفات۔ ایسے چار خطوط مستقیم کے نظام کو جن میں سے کوئی تین متراکز نہیں ہیں، مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔

یہ چار خطوط مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعے کہلاتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعے اب، ب ج، ج د، د ا ہیں۔

نیز فرض کرو کہ اب اور ج د کا نقطۂ تقاطع گ ہے اور ا د اور ب ج کا نقطۂ تقاطع ف ہے۔ پس مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں میں سے دو دو کے تقاطع سے چھ نقطے ا، ب، ج، د، ف، گ حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو

مکمل ذواربعۃ الاضلاع کے چھ رأس کہتے ہیں۔

ف
د
ج
ا ب گ

مقابل کے رأسوں کو ملانے والے تین خطوط یعنی اج، ب د اور ف گ کو مکمل ذواربعۃ الاضلاع کے تین قطر کہتے ہیں۔

۹۷۔ مسئلہ۔ مکمل ذواربعۃ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

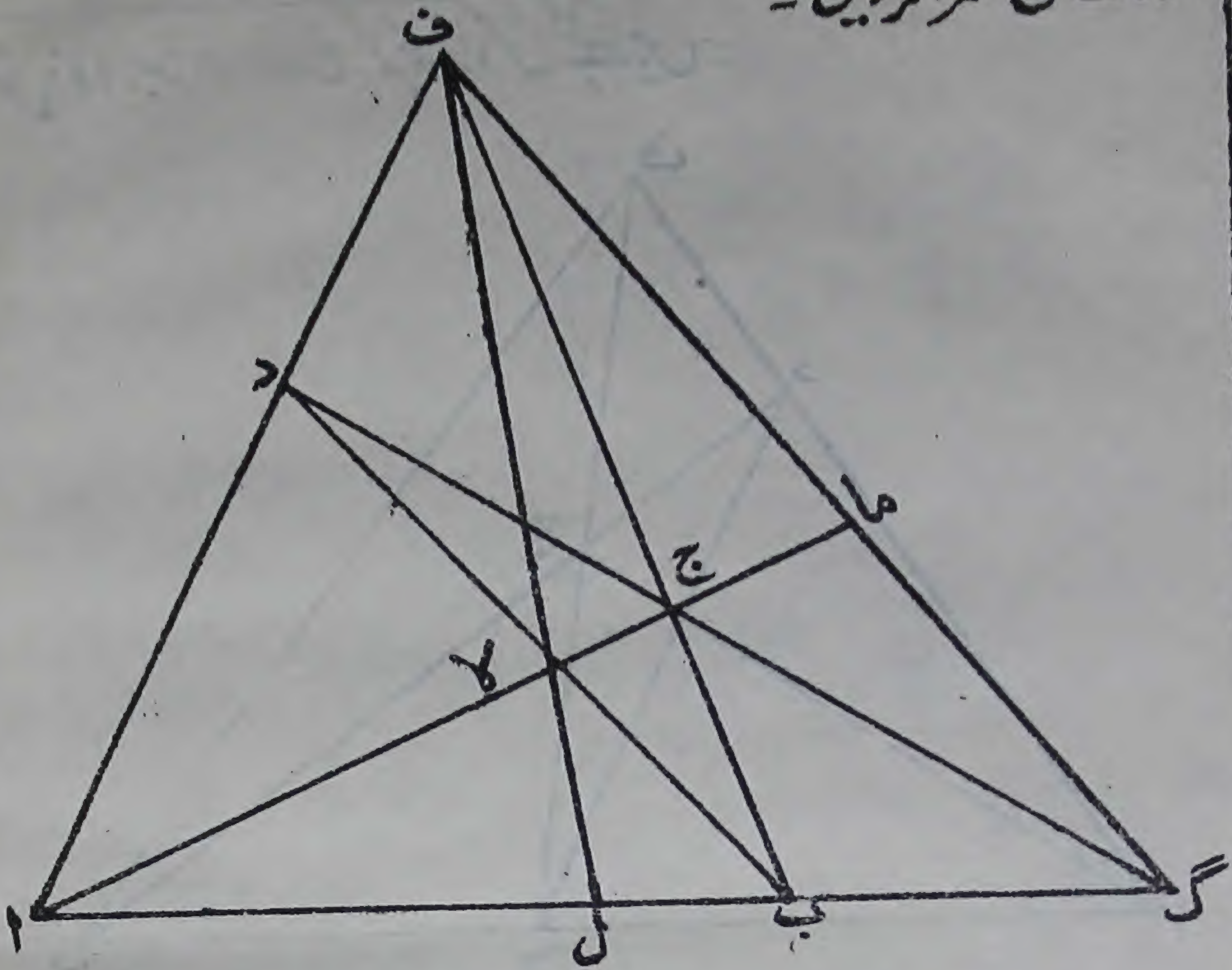
دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق مکمل ذواربعۃ الاضلاع کے قطر اج، ب د اور ف گ ہیں۔

فرض کرو کہ قطر اج کو دوسرے دو قطر ب د اور ف گ بالترتیب نقاط لا اور ما پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے کہ ا لا ج ما موسیقی صف ہے۔

فرض کرو کہ ف لا اور ا ب کا نقطۂ تقاطع ل ہے۔

مثلث ف ا ب کے رأسوں سے گزرنے والے خط اج، ب د

اور ف ل متراکز ہیں۔

اس لیے سیوا کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{ا ل}}{\text{ل ب}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ف}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{د ا}} = +۱ \quad \ldots\ldots (۱)$$

نیز مثلث ف ا ب کے ضلعوں پر کے تین نقطے گ، ج، د ہم خط ہیں۔
اس لیے مینی لاس کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{ا گ}}{\text{گ ب}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ف}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{د ا}} = -۱ \quad \ldots\ldots (۲)$$

نتائج (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ا ل}}{\text{ل ب}} = -\frac{\text{ا گ}}{\text{گ ب}}$$

یعنی ا ل ب گ موسیقی صف ہے

اِس لیے پنسل ف (ا ل ب گ) موسیقی پنسل ہے۔
اِس لیے اِس پنسل کے قاطع اما پر موسیقی صف الاج ما حاصل ہوتی ہے۔
پس ثابت ہوا کہ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے قطر ب د اور ف گ تیسرے قطر اج کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔
اسی طرح سے دُوسرے دو قطروں ب د اور ف گ کے لیے بھی مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔

امثلہ ۲۲

(۱) خط اب کا وسطی نقطہ لا ہے، ا اور ب کے لحاظ سے نقطہ لا کا موسیقی مزدوج کہاں ہے؟

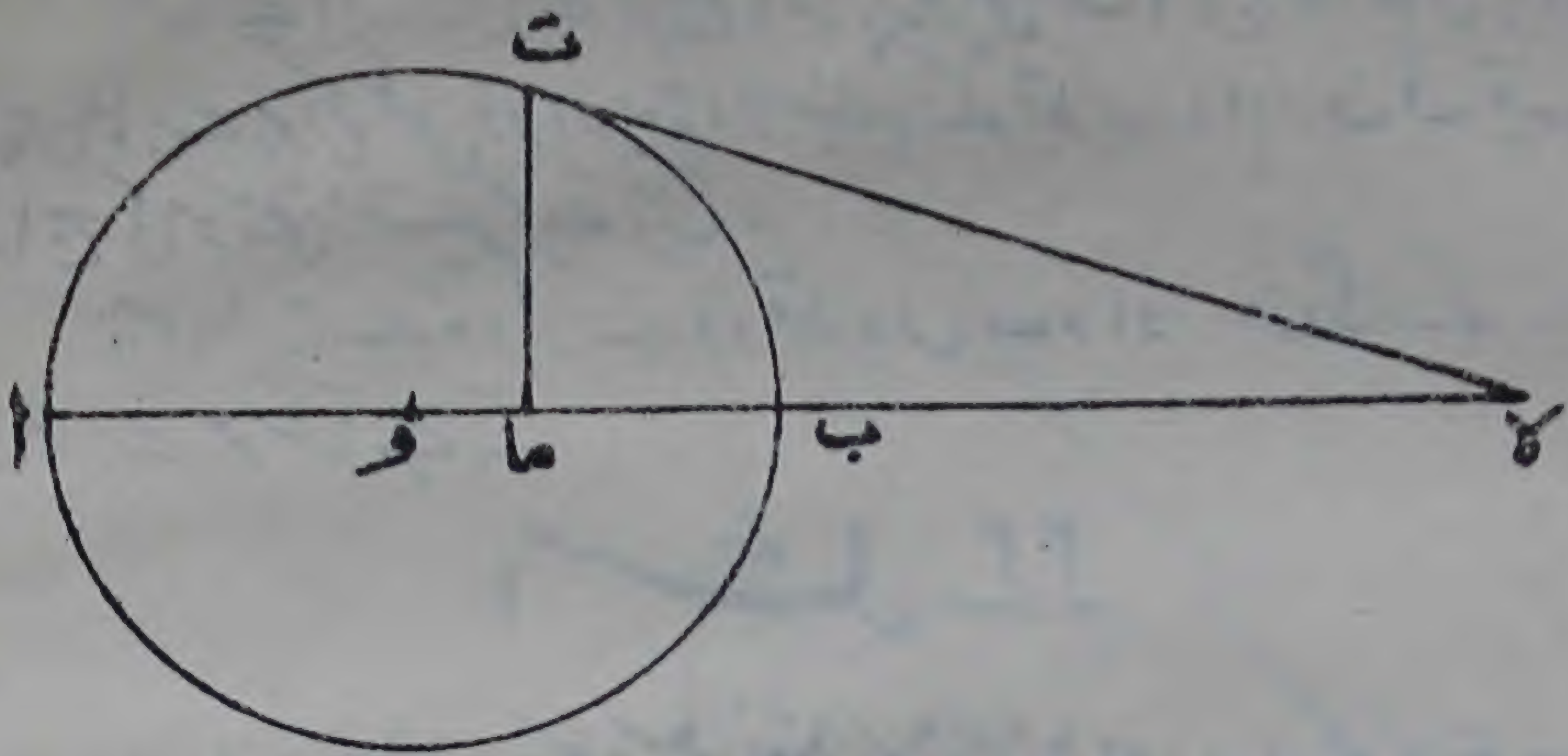
(۲) مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے مُنصِف ا لا اور ا ما ہیں۔ ثابت کرو کہ ا (ب لا ج ما) موسیقی پنسل ہے۔

(۳) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا ایک قطر ف ق ضلع ب ج پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا (ق ب ف ا ج) موسیقی پنسل ہے۔

(۴) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ج د کوئی خط ہے جو اب کے متوازی نہیں ہے ج د پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ا ن ب کا ایک مُنصِف خط ج د ہو۔

(۵) ا ب ج ایک مثلث ہے اور ن ایک ثابت نقطہ ہے جو مثلث کے اضلاع پر نہیں ہے۔ ن میں سے ایک خط کھینچو جو مثلث کے اضلاع ا ب، ب ج، ج ا سے ایسے نقاط ف، ق، ر پر ملے کہ (ن ف ق ر) = -۱

(۶) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب د کے متوازی ا ع کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ا (ب د، ج ع) = -۱

(۷) ایک دائرہ کے قطر اب ممدودہ پر کے کسی نقطہ لا سے دائرہ کا ایک مماس لا ت کھینچا گیا ہے اور ت سے اب پر عمود ت ما ہے۔ ثابت کرو کہ لا ا اور لا ب کا حسابی اوسط لا و ہے، ہندسی

اوسط لات ہے اور موسیقی اوسط لاما ہے۔

(۸) شکل بالا میں ثابت کرو کہ (اب، مالا) = -۱

(۹) شکل بالا میں اگر لا سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ و سے ف اور ق پر اور ت ما سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ لا ف ن ق موسیقی صف ہے۔

(۱۰) دو دائرے (و۱) اور (و۲) ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔ اگر دائرہ (و۱) کا کوئی قطر اب دائرہ (و۲) سے ف اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ (اب، ف ق) = -۱

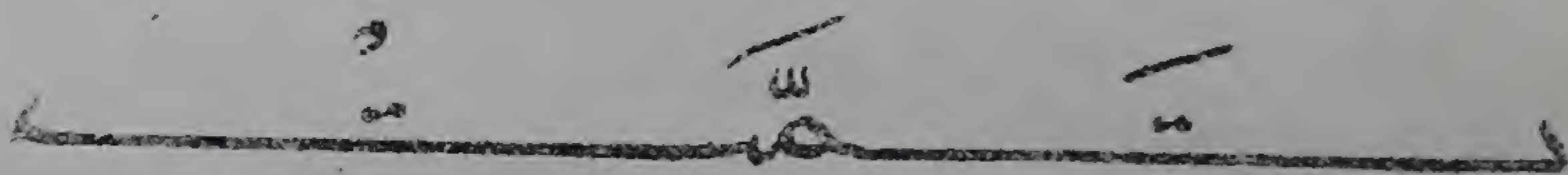
(۱۱) و (اب ج د) موسیقی پنسل ہے۔ اگر ا و̂ ج قائمہ زاویہ ہو تو دفعہ ۹۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ ب و̂ د کے منصف و ا، و ج ہیں۔ [مقابلہ کرو دفعہ ۹۳ کے ساتھ]

(۱۲) ایک خط پر تین نقطے ا، ب، ج دیے گئے ہیں۔ صرف پٹری کو استعمال کرنے سے دفعہ ۹۷ کی مدد سے اسی خط پر نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ (اب ج د) = -۱

(۱۳) و ا، و ب، و ج تین دیے ہوئے خط ہیں۔ خط و د

ایسا کھینچو کہ و (ا ب ج د) = -۱

(۱۴) دو دائرے ایک دوسرے کو ب اور ج پر قطع کرتے ہیں اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس دائروں کو ف اور ق پر مس کرتا ہے ب اور ج میں سے گزرنے والا کوئی دائرہ خط ف ق سے ل اور م پر ملتا ہے ثابت کرو کہ (ف ق، ل م) = -۱

تمت

صحت نامہ

علم ہندسۂ مستوی

(بار دوم)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸	۲۱	ج/د - تو	ج/د تو
۲۶	۱۴	ب۱ ا۱ ج۲	ب۱ اٰ۲ ج۲
۳۹	۱۴	یہ	یہ
۴۲	آخری	مو نگے	ہونگے
۴۹	۶	شکل ۱۱	شکل ۱
۵۴	شکل ۱/۲		
۵۴	۱۳	ب۲	ب۲
"	۱۹	ا بگ	ا ب۲

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵۷	۴	ن - ف'	ن' ف'
۶۸	۷	ب د	ا ب د
۸۲	شکل ۱/۲	میں خط ع ط کو کچھ آگے بڑھایا جائے	
"	۵	(ق۳) اور (ق۳)	(ق۲) اور (ق۳)
۹۶	۱۴	ط ت۲	ط ت۲
۱۰۵	۱۴	کھینچو جو دویے	کھینچو جو دو دیے
۱۱۵	۲	قیمتس	قیمتیں
۱۱۷	شکل		